وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة بغداد

الميكانيك التحليلي

تأليف
گرانت ر. فاولس
جامعة يوتا

ترجمة
الدكتور طالب ناهي الخفاجي
الاستاذ المساعد في قسم الفيزياء
كلية العلوم - جامعة بغداد

هذه ترجمة لكتاب

Analytical Mechanics

By

Grant R. Fowles

Second Edition - 1970

Holt Rinehart and Winston, Inc.

New York, London.

مقدمة المترجم

لا شك في ان التحولات العلمية في بلدنا العزيز ، وما تمخض عنها من مردودات ايجابية مستمرة ومتواصلة في المجالات العلمية ، تتطلب منا الانفتاح التام على المنجزات العلمية التي تمت وتتم في البلدان المتقدمة ، بغية الاستفادة منها في اضافة لبنات جديدة لبنائنا الصناعي المتنامي . ومن مستلزمات ذلك الانفتاح تعريب الكتب العلمية القيمة ، خصوصا وان المكتبة العربية تكاد ان تخلو من المصادر العلمية العربية . لذا اقدمت على ترجمة هذا الكتاب في موضوع الميكانيك التحليلي . وكان سبب اختياري لهذا الكتاب بالذات: دقته العلمية ووضوح عبارته وسلاسة اسلوبه وشمول موضوع بحثه وما تميز به من امثلة وتمارين تقرب الفكرة الى ذهن الطالب وتمكنه في معرفة مدى استيعابه للمادة . اضافة الى احاطة علم القارئ ببعض الجوانب المتعلقة بعلم حيوي يلعب دورا اساسيا في بناء الصناعة الحديثة ، الا وهو علم الفيزياء .

وقد حاولت جهد امكاني التوفيق بين لغة المؤلف الانكليزية واللغة العربية ـ رغم ما في ذلك من مصاعب ـ طامحا قدر المستطاع في نقل مضمونه بأمانة واخلاص وآملا ان اكون قد وفقت في هذا المضمار لتحقيق الغرض المطلوب منه والله ولي التوفيق .

طالب ناهي الخفاجي

مقدمة المؤلف

ان الغاية المتوخاة من هذا الكتاب هي ان يكون كتابا مدرسيا في موضوع الميكانيك التحليلي لطلبة الصفوف الثالثة في الفيزياء أو العلوم الهندسية . ومن متطلباته ان يكون الطالب ملما في الفيزياء العامة ورياضيات التفاضل والتكامل ، اضف الى ذلك ، يفضل ان يكون الطالب قد درس او يدرس في الوقت ذاته رياضيات متقدمة تتضمن المعادلات التفاضلية .

ان المخطط التمهيدي للطبعة الحالية هو مخطط الطبعة الاولى نفسه ، ولكن ، هناك توسع في بحث عدد كبير من بنوده ، كما اضيفت اليه بنود جديدة اخرى خصوصا في الفصل الاخير عن نظرية النسبية . كما اضيفت اليه عدد كبير من التمارين مما جعل عددها في هذه الطبعة ضعف ما كانت عليه في الطبعة الاولى ، كما اعيد تنظيم الفصل الرابع بصورة مستفيضة " داينميك الجسيم ، الحركة العامة " وقد عرضت رياضيات المتجهات في الفصل الاول واستخدمت في كل مكان من الكتاب . حيث اشتمل الفصلان الاول والثاني على مقدمة قصيرة عن رياضيات المتجهات . وفي الفصل الثالث فقد بحثت حركة الجسيم على خط مستقيم وفي الفصل الرابع بحثت حركة الجسيم بصورة عامة . اما في الفصل الخامس فقد شرحت تأثيرات حركة المحاور الانتقالية والدورانية وعلاقتها بوصف حركة الجسيم . ولما كان لتطبيق ميكانيك الاجرام السماوية اهمية خاصة في علم الفضاء ، لذلك افرد له بحث مستفيض في الفصل السادس . وهناك تطبيقات اخرى عن علم الفضاء في الفصلين الخامس والسابع .

وبرهنت النظريات العامة التي تخص حركة منظومة متكونة من عدد من الجسيمات في الفصل السابع ، ووضحت بدراسة التصادم وحركة الصاروخ . وخصص الفصلان التاليان لدراسة حركة الجسيم الصلد . اما الفصل الثامن فقد تضمن قليلا من الستاتيك ، لان في هذه المرحلة ، يكون الطالب قد اكتسب خبرة في هذا الموضوع من حل تمارين التوازن الستاتيكي في مواضيع الفيزياء التي سبقت هذا الموضوع .لم يحتوى الكتاب على موضوعي المرونة والهيدروداينميك ، لان المؤلف يرى وجود تأجيل هذين الموضوعين الى الصف الرابع او للدراسة العليا . اي بعد ان يتهيأ الطالب تماما في الرياضيات .

احتوى الفصل العاشر على بحث ميكانيك لاكرانج ، كما تضمن هذا الفصل بحثا

مختصرا عن معادلات هملتن . واستخدمت طريقة لاكرانج في الفصل الحادي عشر لدراسة تذبذب المنظومات كما احتوى هذا الفصل على شرح مختصر عن استقرار التوازن.

يحتوي الفصل الاخير على مقدمة في النظرية النسبية الخاصة . والجزء الاول منه اقتصرعلى تحويلات لورنس ونتائجها المباشرة . وتضمن الجزء الاخير من هذا الفصل على بحث استخدام المصفوفات في دراسة النظرية النسبية الخاصة .

هناك مجموعة كبيرة من التمارين في نهاية كل فصل . بعض منها نظريات مهمة على الطالب برهنتها ، على ان يعطيه المدرس تلميحا . كما ان المولف يتوقع من الطالب ان يساهم في تطوير المادة . بدلا من تعويض ارقام في المعادلات التي اشتقت في الكتاب . كما اعطيت اجوبة التمارين الفردية في نهاية الكتاب . كما اننا مستعدون لتزويد المدرس باجوبة التمارين الاخرى عند الطلب .

وقد وضعت علامة النجمة على البنود المتقدمة والتي يمكن حذفها دون ان توثر على سير تدريس الموضوع ، خصوصا اذا كان الوقت المخصص لتدريس الموضوع قصيرا . وعلى أية حال ، يفضل ان يقرأ الطلبة الجيدين هذه البنود .

واخيرا اقدم شكري الى جميع الذين ساعدوني في طبعة الكتاب الاولى والى الذين انتقدوه انتقادا بناء بعد استخدامه ، حيث ساعدني هذا كثيرا في تحضير الطبعة الحالية .

كرانت ر . فاولس

المحتويات

الفصل الاول

مفاهيم اساسية ـ التجهات

Fundamental Concepts-Vectors

في اية نظرية علمية وخصوصا في علم الميكانيك يجب ان نبدأ بمفاهيم معينة اولية • كذلك من الضروري وضع عدد معين من الفرضيات المعقولة •

ان من اكثر المفاهيم اساسية مفهومان هما ـ الفضاء Space والزمن Time واعتمادا على دراستنا الاولية لعلم الحركة في الميكانيك سنفترض ان الفضاء الفيزيائي المتعامل فيه اعتياديا يوصف بالفضاء الرياضي ذى الابعاد الثلاثة للهندسة الاقليدية وهذا وصف نستطيع الاكتفاء به الان •• اما بالنسبة لمفهوم الزمن • فسنفترض سلسلة من الاحداث المرتبة المتتابعة التي يمكن ان تقاس بمقياس زمني منتظم مطلق • بالاضافة الى ذلك سنفترض ان لكل من الفضاء والزمن كيانا مستقلا واضحا • الا اننا عندما ندرس النظرية النسبية فيما بعد سنعيد النظر في مفهومي الفضاء والزمن اللذين سوف نجدهما غير مستقلين ولا مطلقين • وهي مسألة سوف نعود اليها بعد ان ندرس اسس الميكانيك الكلاسيكي •

لاجل تعريف موضع جسم في الفضاء • من الضروري اتخاذ محاور مرجعية • وسنستعمل نظام الاحداثيات في الميكانيك والنوع الاساسي لنظام الاحداثيات الذى يفي باغراضنا هو نظام الاحداثيات الديكارتية

Cartesian Coordinate او نظام الاحداثيات المتعامدة وهو مجموعة مكونة من ثلاث مستقيمات (او محاور) متعامدة في هذه الاحداثيات يعين موضع نقطة بثلاثة اعداد او محاور هي z,y,x وتتغير احداثيات النقطة المتحركة بمرور الزمن ، اى تكون الاحداثيات دوال للكمية t المقاسة على مقياسنا الزمني .

ان الجسيم او النقطة الكتلية من المفاهيم المفيدة في الميكانيك ، والجسيم شيء له كتلة[1] ولكن ليس له امتداد بعدى . انه ، بتعبير ادق ، مفهوم مثالي مجرد لا وجود له في الطبيعة فحتى الالكترون له حجم محدود . ولكن فكرة الجسيم مفيدة كتقريب لجسم صغير او بتعبير ادق لجسم ذى حجم غير مهم نسبيا في نطاق بحث معين . وهكذا يمكننا مثلا معاملة الارض كجسيم في ميكانيك الفلك .

١ ــ ١ الكميات الفيزيائية والوحدات Physical Quantities & Units

يعبر عن الحقائق الفيزيائية التي تحت المشاهدة بدلالة مكونات اساسية ثابتة تسمى الكميات الفيزيائية مثل الطول والزمن والقوة وهلم جرا .. والكمية الفيزيائية هي الشيء الذى يمكن قياس مقداره بدلالة وحدة مختارة . فمثلا عندما نقول ان طول جسم معين (٧ سم) نعني بذلك ان القياس الكمي (٧) هو العلاقة (النسبة) بين طول الجسم وطول الوحدة (١ سم) .

وقد وجد انه من الممكن تعريف جميع الكميات الفيزيائية في الميكانيك بدلالة ثلاث وحدات اساسية فقط هي الطول والكتلة والزمن .

وحدة الطول

ان وحدة الطول القياسية هي المتر . وقد كان المتر سابقا

---

(١) سيشرح مفهوم الكتلة في الفصل الثالث

المسافة المحصورة بين حدين ثابتين على قضيب من البلاتين محفوظ في دار المقاييس العالمية في فرنسا ٠ اما الان فان المتر يعرف بالمسافة التي تحتويها ٧٣ ر ١٦٥٠٧٦٣ موجه ضوئية كاملة لخط الطيف البرتقالي لنظير الكريبتون — ٨٦ ٠

وحدة الكتلة

ان وحدة الكتلة القياسية هي الكيلوغرام ٠ وهي كتلة اسطوانة من فلزي البلاتين والايراديوم محفوظة في دار المقاييس العالمية ٠

وحدة الزمن

الوحدة الاساسية لقياس الزمن هي الثانية وقد عرفت سابقا بدلالة دوران الارض ٠ الثانية بهذا التعريف هي مقدار الزمن لـ ٩١٩٢٦٣١٧٧٠ ذبذبة تحدث في انتقال ذري خاص لنظير السيزيم Cesium ذي العدد الكتلي — ١١٣ ٠

ان نظام الوحدات آنف الذكر يسمى بالنظام العالمي [٢] (I.S.) والمعيار الذري الحديث للطول والزمن في هذا النظام ليس فقط اكثر دقة من المعايير السابقة وانما يمكن استنتاجه عالميا وهو غير قابل للفناء الا ان التكتيك الحالي لسوء الحظ ٠ غير عملي لاستخدام معيار ذري للكتلة ٠

في الواقع ليس هناك سبب خاص لاستخدام الطول والكتلة والزمن كمجموعة اساسية لتعريف الوحدات ٠ فقد استخدمت مجموعات اخرى من

(٢) في هذا النظام توجد وحدة رابعة هي الكولوم التي تستعمل لتعريف الوحدات الكهربائية ٠

الكميات الفيزيائية مثل الطول والقوة والزمن في النظام التثاقلي .

وتوجد انظمة اخرى شائعة الاستعمال بالاضافة الى نظام I.S. كنظام cgs او سنتمتر ـ غرام ـ ثانية ونظام FPS او قدم ـ باوند ـ ثانية . وهذان النظامان يمكن اعتبارهما ثانويين بالنسبة لنظام I.S. لان وحداتهما عرفت بصورة خاصة ككسور لوحدات I.S.

١ سم = ١٠ $^{-٢}$ م

١ غم = ١٠ $^{-٣}$ كغم

١ قدم = ٣٠٤٨ر٠ م

١ پا = ٤٥٣٦ر٠ كغم

١ ـ ٢ الكميات العددية والمتجهة Scalar and Vector Quantities

ان الكميات الفيزيائية التي تعين تعيينا كاملا بمعرفة مقدارها فقط تسمى " الكميات العددية Scalars" ومن الامثلة الشائعة للكميات العددية ـ الكثافة والحجم ودرجة الحرارة . وتعامل الكميات العددية رياضيا كاعداد حقيقية عادية . وتخضع عند الجمع والطرح و الضرب والقسمة لجميع القوانين المألوفة في الجبر .

وهناك كميات فيزيائية معينة تحتوى على خاصية اتجاهية ، مثل الازاحة من نقطة في الفضاء الى اخرى .. مثل هذه الكميات يلزم لوصفها بصورة كاملة ذكر اتجاهها فضلا عن مقدارها . وتسمى هذه الكميات بالكميات المتجهة Vectors وهي اذا اتحدت مع بعضها تخضع لقانون متوازى

الاضلاع للجمع والذى سنشرحه فيما بعد في بند ١ ـ ٦[٣] بالاضافة الى الازاحة في الفضاء هناك امثلة شائعة اخرى للمتجهات مثل السرعة والتعجيل والقوة ٠ ان مفهوم المتجه وتطوير رياضيات الكميات المتجهة ككل اثبتتا ضرورتهما في تطوير علم الميكانيك ٠ وسيكرس ما تبقى من هذا الفصل لدراسة مختصرة في جبر المتجهات ٠

١ ـ ٣ رموز Notation

تمثل الكميات المتجهة بحروف الطابعة الثقيلة مثل (A) بينما تمثل الكميات العددية بحروف الطابعة الاعتيادية ٠

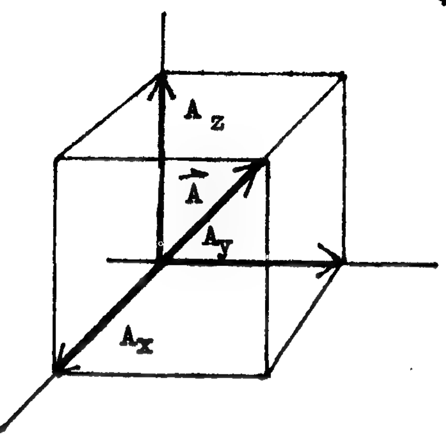
اما في الكتابة فتستعمل اعتياديا علامة مميزة كالسهم الذى يدل على ان الكمية متجهة مثل $\vec{A}$.

يعين اى متجه مثل $\vec{A}$ بصورة كاملة بذكر مقداره واتجاهه بالنسبة الى محاور يتفق عليها كمرجع ٠ ويمثل في الرسم بسهم يشير الى اتجاه المتجه ويتناسب طوله مع مقداره

---

(٣) كمثال لكمية لها اتجاه ولكن لا تخضع لقانون الجمع هو الدوران المحدود لجسم حول محور معين ويمكن للقارىء ان يتحقق بسهولة من ان دورتين متتابعتين حول محاور مختلفة لا تحدثان نفس تأثير الدوران المنفرد الذى يعين من قانون متوازى الاضلاع على اية حال سوف لا نهتم في الوقت الحاضر بكميات من هذا النوع ٠

كما هو مبين في الشكل (١ ـ ١) ويعين كذلك تعيينا كاملا



الشكل (١ ـ ١) مركبات متجه في المحاور الديكارتيه

بذكر مركباته او مساقطه على طول المحاور المستخدمة وسيستعمل رمز مركبات المتجه $[A_x, A_y, A_z]$ كتمثيل آخر للمتجه •

فالطرف الايمن من المعادلة $\vec{A} = [A_x, A_y, A_z]$ يمثل المتجه $\vec{A}$ بدلالة مركباته في محاور خاصة (سيفرض ان المحاور الديكارتيه هي المقصودة ، ان لم يذكر خلافا لذلك) • فمثلا اذا كان $\vec{A}$ يمثل الازاحة من النقطة $P_1(x_1, y_1, z_1)$ الى النقطة $P_2(x_2, y_2, z_2)$

عندئذ $A_z = z_2 - z_1,\ A_y = y_2 - y_1,\ A_x = x_2 - x_1$

واذا كان $\vec{A}$ يمثل قوة ، عندئذ تكون A_x مركبة القوة وهلم جرا • وواضح ان القيم العددية لمركبات متجه معين تعتمد على اختيار المحاور

اذا اقتصر بحث خاص على متجهات واقعة في مستو واحد يلزمنا في هذه الحالة مركبتان فقط وبالعكس ، فمن الممكن تعريف فضاء رياضي لاي عدد من الابعاد • اذن يمثل الرمز $(A_1, A_2, A_3, \dots\ A_n)$

متجها ابعاده n . وفي هذا المفهوم المجرد يصنف المتجه كمجموعة اعداد .

١ـ ٤ تعاريف اصطلاحية وقواعد Formal Definitions and Rules

تبدأ دراسة جبر المتجهات ببعض التعاريف الاصطلاحية الخاصة بالمتجهات :ـ

١ـ تساوى المتجهات Equality of Vectors

المعادلة $\vec{A} = \vec{B}$

او $(A_x, A_y, A_z) = (B_x, B_y, B_z)$

تكافيء المعادلات الثلاث التالية :ـ

$$A_x = B_x \qquad A_y = B_y \qquad A_z = B_z$$

اى تتساوى المتجهات اذا تساوت مركباتها المتعاقبة

٢ـ جمع المتجهات Vector Addition

يعرف جمع اى متجهين بالمعادلة التالية :

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x, A_y, A_z) + (B_x, B_y, B_z) = (A_x+B_x, A_y+B_y, A_z+B_z)$$

وهذا يعني ان مجموع اى متجهين هو متجه اخر مركباته مساوية لمجموع مركبات المتجهين المعلومين .

٣ـ الضرب بكمية عددية Multiplication by a scalar

اذا كانت c كمية عددية و $\vec{A}$ كمية متجهة فان

$$c\vec{A} = c(A_x, A_y, A_z) = (cA_x, cA_y, cA_z) = \vec{A}c$$

اى حاصل الضرب $c\vec{A}$ كمية متجهة اخرى مركباتها c من المرات اكبر من مركبات المتجه $\vec{A}$.

٤ـ طرح المتجهات Vector Subtraction

يعرف طرح المتجهات كما يلي :

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-1)\,\vec{B} = (A_x - B_x,\ A_y - B_y,\ A_z - B_z)$$

٥ـ متجه الصفر The Null Vector

المتجه $\vec{0} = (0,0,0)$ يسمى متجه الصفر .

واتجاه متجه الصفر غير معرف ومن (٤) نحصل على $\vec{A} - \vec{A} = 0$

ولما كان استعمال الصفر بدلا من متجه الصفر ليس مربكا لـذلك سنستعمل في المستقبل الرمز $0 = \vec{0}$.

٦ـ قانون تبادل الحدود في الجمع The Commutative Law of Addition

يصح هذا القانون في جبر المتجهات اى ان

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

لان $A_x + B_x = B_x + A_x$ كذلك بالنسبة لمركبات y , z

٧ـ قانون ترتيب الحدود The Associative Law

ويصح كذلك قانون ترتيب الحدود في المتجهات لان

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \left[A_x + (B_x + C_x),\ A_y + (B_y + C_y),\ A_z + (B_z + C_z)\right]$$

$$= (A_x + B_x) + C_x,\ (A_y + B_y) + C_y,\ (A_z + B_z) + C_z) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$$

٨ـ قانون توزيع الحدود The Distributive Law

يصح قانون توزيع الحدود عند ضرب المتجهات في كمية عددية لاننا نحصل من (٢) و (٣) على ـ

$$c(\vec{A} + \vec{B}) = c(A_x + B_x,\ A_y + B_y,\ A_z + B_z)$$

$$= c(A_x + B_x),\ c(A_y + B_y),\ c(A_z + B_z)$$

$$= (cA_x + cB_x,\ cA_y + cB_y,\ cA_z + cB_z)$$

$$= c\vec{A} + c\vec{B}$$

اى ان المتجهات تخضع لقوانين الجبر الاعتيادية فيما يخص العمليات انفة الذكر .

١ ـ ٥ مقدار المتجه Magnitude of a Vector

يرمز لمقدار المتجه $\vec{A}$ بالرمز $|\vec{A}|$ او بـ A ويعرف بالجذر التربيعي لحاصل جمع مربع مركبات المتجه .

$$A = |\vec{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (١ ـ ١)$$

واخذ الجذر الموجب شيء بديهي في الهندسة يكون مقدار المتجه هو طوله . اى طول قطر متوازى مستطيلات اضلاعه A_x ، A_y ، A_z .

١ ـ ٦) الوحدات المتجهة للمحاور Unit Coordinate Vectors

المتجه الذى مقداره واحد عدد صحيح يسمى (الوحدة المتجة) والوحدات المتجهة الثلاث

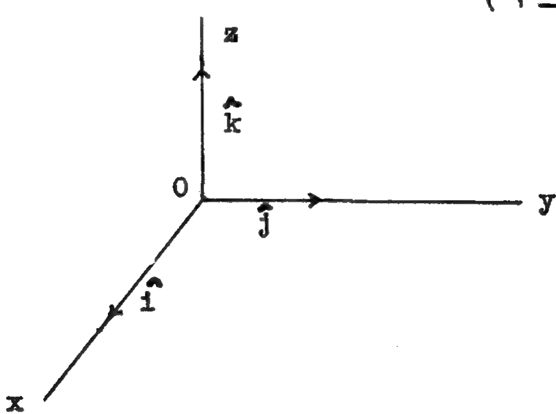
$$\hat{i} = [1,0,0] , \quad \hat{j} = [0,1,0] , \quad \hat{k} = [0,0,1] \qquad (١ ـ ٢)$$

تسمى (الوحدات المتجهة للمحاور) او (المتجهات الاساسية) ويمكن تمثيل اى متجه بدلالة هذه المتجهات كمجموع على النحو التالي

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (A_x,A_y,A_z)=(A_x,0,0) + (0,A_y,0 + (0,0,A_z) \qquad (١ ـ ٣)\\ &= A_x(1,0,0) + A_y(0,1,0) + A_z(0,0,1)\\ &= \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z\end{aligned}$$

ان تمثيل "المجموع" ملائم لاغراض كثيرة وسيستخدم كثيرا وسوف نسميه صيغة ـ ijk لتمثيل المتجه .

وتعرف اتجاهات الوحدات المتجهة بواسطة نظام الاحداثيـــات (الشكل ١ ــ ٢)



الشكل (١ ــ ٢) الوحدات المتجهة للاحداثيات ijk.

وهي تكون ثلاثي اليد ــ اليمنى او اليسرى ويتوقف ذلك على نـــوع المحاور المستخدمة واعتياديا تستخدم محاور اليد اليمنى ، وهـي المحاور المبينة في الشكل (١ ــ ٢) .

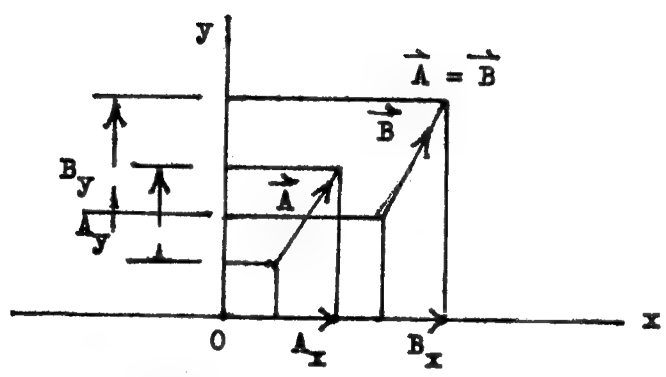
(١ــ٧) المعنى الهندسي لجبر المتجهات

Geometric Meaning of Vector Operations

اذا فرضنا ان المتجهة يمثل بمستقيم طوله واتجاهه معلومـــان ، فيمكن ببساطة التحقق من ان التعاريف التي ذكرنا نصوصها توا لهـا التفاسير البسيطة التالية :

١ ــ تساوي المتجهات Equality of Vectors

اذا تساوى متجهان ، فانهما عندئذ يكونان متوازيين ولهما نفس الطول ولكن ليس من الضروري ان يكون لهما نفس الموضع . والشكل (١ ــ ٣) يبين متجهين متساويين حيث رسمت مركبتان فقط لكل منهمـا للوضـوح .

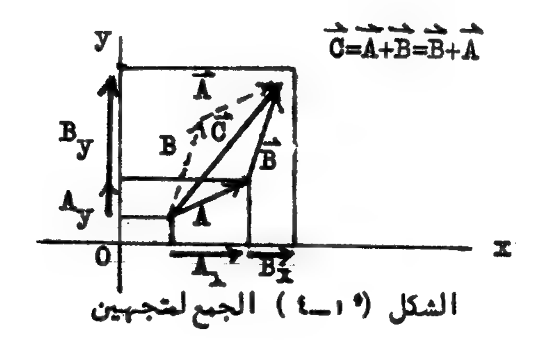


الشكل (١ ـ ٣) يوضح المتجهات المتساوية

لاحظ ان المتجهين يكونان ضلعين متقابلين لمتوازى الاضلاع (كما انه ليس من الضرورى ان تكون المتجهات المتساوية متكافئة في جميع النواحي ٠٠ فمثلا حتى اذا تساوى متجها قوتين تؤثران في نقطتين مختلفتين في جسم فأن كلا منهما قد تولد تأثيرا ميكانيكيا يختلف عن تاثير الاخرى) ٠

٢ ـ جمع المتجهات Vector Addition

الجمع الا تجاهي لمتجهين يساوى الضلع الثالث لمثلث ، ضلعاه الاخران يساويان المتجهين المعنيين ٠ الشكل (١ـ٤) يوضح جمع المتجهات * كذلك يعين



الشكل (١ـ٤) الجمع لمتجهين

الجمع بقاعدة متوازى الاضلاع كما هو مبين في نفس الشكل.(يعرف جمع المتجهات من ناحية ثانية طبقا للتعريف (١-٤) (٢) حتى لو لم يكن للمتجهات نقطة مشتركة)

٣ ـ ضرب المتجه بكمية عددية Multiplication of a Vaotor by a Scalar

المتجه $c\vec{A}$ يوازى المتجه $\vec{A}$ وطوله c مرة اكبر من $\vec{A}$ عندما يكون $c = -1$ يعني ان اتجاه $-\vec{A}$ هو معكوس اتجاه $\vec{A}$ كما هو مبين في الشكل

الشكل (١ ـ ٥) السالب للمتجهه

١ـ٨) الضرب العددى The Scalar Product

الضرب العددى لاى متجهين مثل $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يمثل بالرمز $\vec{A}.\vec{B}$ ويقرأ (A dot B) وهو كمية عددية تعرف بالمعادلة التالية :

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad (١-٤)$$

وينتج من التعريف المذكور انفا ان

$$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A} \qquad (١-٥)$$

لان $A_xB_x = B_xA_x$ وهلم جرا وينتج كذلك ما يلي :ـ

$$\vec{A}.(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C} \qquad (١-٦)$$

لاننا اذا استفدنا من التعريف (١ـ٤) بالتفصيل نحصل على :ـ

$$\vec{A}.(\vec{B} + \vec{C}) = A_x(B_x + C_x) + A_y(B_y + C_y) + A_z(B_z + C_z)$$

$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z + A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z$$

$$= \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$$

نتذكر من الهندسة التحليلية العلاقة التالية لجيب تمام الزاوية المحصورة بين مستقيمين والتي هي :ـ

$$\cos\theta = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{\frac{1}{2}}\,(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

وباستعمال المعادلتين (١ ـ ١) و (١ ـ ٤) يمكن كتابة المعادلة المذكورة اعلاه على الشكل التالي :ـ

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}$$

او

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta \qquad (١ ـ ٧)$$

يمكن اعتبار العلاقة السابقة كتعريف آخر للضرب العددي . هندسيا $\vec{A}\cdot\vec{B}$ تساوى طول مسقط $\vec{A}$ على $\vec{B}$ مضروبا في طول $\vec{B}$.

اذا كان الضرب العددي $\vec{A}\cdot\vec{B}$ يساوى صفرا ، عندئذ يكون $\vec{A}$ عموديا على $\vec{B}$ ، على الا يكون اى من $\vec{A}$ او $\vec{B}$ مساويا للصفر .

ان مربع مقدار المتجه $\vec{A}$ ينتج من ضرب المتجه $\vec{A}$ في نفسه عدديا . اى ان

$$A^2 = |\vec{A}|^2 = \vec{A}\,.\,\vec{A}$$

من تعاريف الوحدات المتجهة للاحداثيات $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ يمكن التحقق من صحة العلاقات التالية بسهولة ..

$$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$$

$$\hat{i}.\hat{j} = \hat{i}.\hat{k} = \hat{j}.\hat{k} = 0 \qquad (١ ـ ٨)$$

لنفرض ان عددا من قوى متلاقية في نقطة واحدة
مثل $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ..., $\vec{F}_n$
تؤثر على جسيم عندئذ يكون شرط التوازن السكوني للجسيم
اى الشرط الذى فيه الجسيم ساكنا تحت تأثير هذه القوى ، هو ان يكون
مجموعها الاتجاهي يساوى صفرا ٠ اى -

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots\ldots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_i = \vec{0}$$

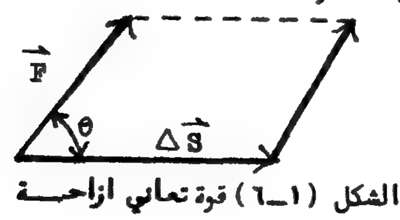
اذا مثلنا مركبة $\vec{F}_1$ باتجاه المحور - x بالرمز X_1 وهلم جرا ،
عندئذ تكون معادلة التوازن المذكورة اعلاه مكافئة للمعادلات الثلاث التالية

$$\sum X_i = 0$$
$$\sum Y_i = 0$$
$$\sum Z_i = 0$$

كما هو جلي من تعريف جمع المتجهات الذى سبق توضيحه في البند
١-٤ (٢) ٠ اذا كانت جميع القوى معروفة باستثناء واحدة منها فيمكن
ايجاد مركبات هذه القوة المجهولة من حل معادلات التوازن المذكورة اعلاه

٢- الشغل Work

افرض ان جسما قد ازيح خطيا $\Delta\vec{S}$ بتاثير قوة ثابتة $\vec{F}$ ،
كما هو مبين في الشكل (١-٦) فالشغل ΔW يساوى حاصل ضرب
مركبة القوة $\vec{F}$ باتجاه الازاحة $\Delta\vec{S}$



الشكل (١-٦) قوة تعاني ازاحة

(١-٩) بعض تطبيقات المتجهات Some Applications of Vectors

١- تـوازن جسيم Equilibrium of a Particle

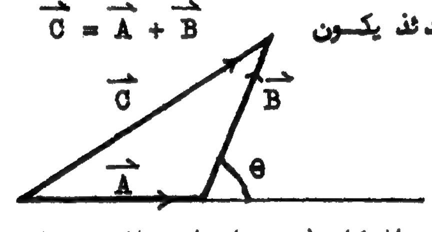
في مقـدار الازاحــة ΔS اى $\Delta W = (F \cos \theta)\, \Delta S$

حيث θ تمثل الزاوية بين $\vec{F}$ و $\Delta \vec{S}$ • ولكن الطرف الايمن عبارة عــن الضرب العـددى للقوة $\vec{F}$ في الازاحـة $\Delta \vec{S}$ اى $\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{S}$

٣ـ قانون الجيب تمام Law of Cosines

يمثل الشكل (١ـ٧) مثلثا اضلاعه المتجهات $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{C}$

عندئذ يكـون $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$



الشكل (١ـ٧) قانون الجيب تمام

وبضرب المتجـه $\vec{C}$ في نفســه عدديا نحصل على

$$\vec{C} \cdot \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B})$$
$$= \vec{A} \cdot \vec{A} + 2\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{B}$$

والخطوة الثانية تنتـج من تطبيق القوانين في المعادلات (١ ـ ٥) و (١ ـ ٦) واسـتبدال $\vec{A} \cdot \vec{B}$ بما يسـاويه $AB \cos \theta$

اى $C^2 = A^2 + 2AB \cos \theta + B^2$ وهذا هو قانـــون الجيب تمام المعروف •

(١ـ ١٠) الضرب الاتجاهي The Vector Product

يمثل الضرب الاتجاهي للمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بالرمـــز $\vec{A} \times \vec{B}$ ويقـرأ ($\vec{A}$ cross $\vec{B}$) ويعرف بالمتجـه الذى مركباتـه تعطـــــــي بالمعادلة التاليـة :

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y\ ,\ A_z B_x - A_x B_z,\ A_x B_y - A_y B_x) \quad (١ـ٦)$$

سيبحث التفسير الهندسي للضرب الاتجاهي في البند (١ ـ ١٢) و

يمكن البرهنة على ان القواعد التالية تصح في الضرب الاتجاهي : ـ

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \qquad (١ـ١٠)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \qquad (١ـ١١)$$

$$n(\vec{A} \times \vec{B}) = (n\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (n\vec{B}) \qquad (١ـ١٢)$$

وبرهنتها تأتي مباشرة من التعريف وقد تركت كتمرين

وفقا للتعاريف الجبرية للوحدات المتجهة للاحداثيات ـ المعادلة (١ ـ ٢)

نستطيع ان نثبت صحة العلاقات التالية للضرب الاتجاهي بسهولة

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} = -\hat{k} \times \hat{j}$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} = -\hat{j} \times \hat{i} \qquad (١ـ١٣)$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} = -\hat{i} \times \hat{k}$$

فمثلا

$$\hat{i} \times \hat{j} = (0-0,\ 0-0,\ 1-0) = (0,0,1) = \hat{k}$$

ويمكن بسهولة برهنة بقية المعادلات بنفس الاسلوب •

(١ـ١١) التفسير الهندسي للضرب الاتجاهي

Geometric Interpretation of the Cross Product

ان تمثيل الضرب الاتجاهي بصيغة - ijk

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{j}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

وكل حد داخل الاقواس مساو الى محدد ٠ اى

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{i}\begin{vmatrix} A_y A_z \\ B_y B_z \end{vmatrix} + \hat{j}\begin{vmatrix} A_z A_x \\ B_z B_x \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} A_x A_y \\ B_x B_y \end{vmatrix}$$

واخيرا

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (١ــ١٤)$$

وبفك المحدد يمكن التحقق من صحته بسهولة ٠ وصيغة المحدد اداة ملائمة تساعدنا على تذكر تعريف الضرب الاتجاهي ٠من خواص المحددات يمكن على الفور معرفة ما اذا كان المتجه $\vec{A}$ موازيا للمتجه $\vec{B}$ اى ما اذا كان $\vec{A} = \alpha\vec{B}$ وذلك عندما يكون الصفان الاخيران من المحدد متناسبين اى تكون قيمة المحدد تساوى صفرا ٠

اذن يكون الضرب الاتجاهي لمتجهين متوازيين يساوى صفرا ٠ لنحسب مقدار الضرب الاتجاهي عندنا :ــ

$$|\vec{A} \times \vec{B}|^2 = (A_yB_z - A_zB_y)^2 + (A_zB_x - A_xB_z)^2 + (A_xB_y - A_yB_x)^2$$

وبقليل من الصبر يمكن تبسيطها الى الشكل التالي

$$|\vec{A} \times \vec{B}|^2 = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) - (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)^2$$

او من تعريف الضرب العددى ٠ يمكن كتابة المعادلة المذكورة اعلاه على الشكل التالي

$$|\vec{A} \times \vec{B}|^2 = A^2B^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2$$

وباخذ الجذر التربيعي لطرفي هذه المعادلة وباستخدام المعادلة (١ ـ٧) نستطيع ان نكتب مقدار الضرب الاتجاهي على النحو التالي

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB(1-\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}} = AB \sin\theta \qquad (١ـ١٥)$$

حيث θ تمثل الزاوية بين $\vec{B}$, $\vec{A}$.

لتفسير الضرب الاتجاهي هندسيا نلاحظ ان المتجه $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ يكون عموديا على كل من $\vec{B}$, $\vec{A}$ لان

$$\vec{A}\cdot\vec{C} = A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z$$
$$= A_x(A_yB_z - A_zB_y) + A_y(A_zB_x - A_xB_z) + A_z(A_xB_y - A_yB_x) = 0$$

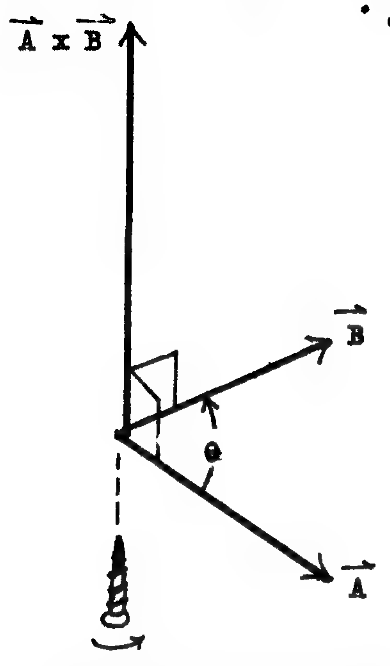
وبالمثل $\vec{B}\cdot\vec{C} = 0$ اذن المتجه $\vec{C}$ يكون عموديا على المستوى الذى يحوى المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

ان اتجاه المتجه $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ يعين من فرضية كون المتجهات الثلاث $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ تشكل ثلاثي اليد اليمنى كما هو واضح من الشكل (١ـ٨) . (هذا ينسجم مع النتيجة التي برهنت سابقا ، فمن ثلاثي اليد ـ اليمنى ijk حصلنا على ($\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$) . اذن نستطيع ان نكتب من المعادلة (١ـ١٥) ما يلي

$$\vec{A} \times \vec{B} = (AB \sin\theta)\vec{n}$$

حيث $\vec{n}$ تمثل الوحدة المتجهة العمودية على مستوى المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ويعين اتجاه $\vec{n}$ من قاعدة اليد اليمنى ، اى ، في اتجاه تقدم لولب (برغي) أيمن يدور من الاتجاه الموجب للمتجه $\vec{A}$ الى $\vec{B}$ خلال الزاوية المحصورة بينهما ، كما هو مبين

في الشكل (١ ـ ٨) ويمكن اعتبار المعادلة (١ـ١٦) كتعريف آخر للضرب الاتجاهي •



الشكل (١ـ٨) الضرب الاتجاهي

امثلـــــــــــــة

١ـ اذا علمت ان $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

جـد $\vec{A} \times \vec{B}$, $\vec{A}.\vec{B}$

$$\vec{A}.\vec{B} = (2)(1) + (1)(-1) + (-1)(2) = 2 - 1 - 2 = -1$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(2-1) + \hat{j}(1-4) + \hat{k}(-2-1)$$

$$= \hat{i} - 3\hat{j} - 3\hat{k}$$

٢ـ جـد الزاوية المحصورة بين $\vec{A}$, $\vec{B}$

من تعريف الضرب العددى نعلم ان

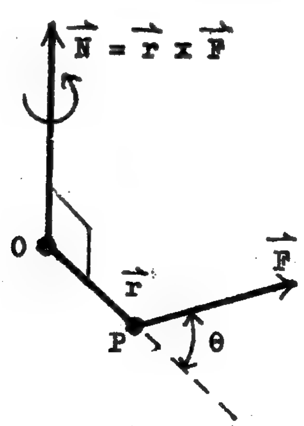
$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = \frac{-1}{(2^2 + 1^2 + (-1)^2)^{\frac{1}{2}} (1^2 + (-1)^2 + 2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-1}{6^{\frac{1}{2}}\, 6^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{6}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{6}\right) = 99.6^{o}$$

(١–١٢) عـزم القـوة Moment of a Force

من التطبيقات المفيدة وبصورة خاصـة للضرب الاتجاهي هو تمثيل العزم لنفرض ان القوة $\vec{F}$ تؤثر في النقطـة $P(x, y, z)$ ، كمـا هو مبين في الشـكل (١–٩)، ولنمثل المتجـه $\vec{OP}$ بالرمز $\vec{r}$ اى ان



الشكل (١–٩) ، عزم القوة

$$\vec{OP} = \vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

ويعرف العزم $\vec{N}$ حول نقطة معلومة مثل O بالضرب الاتجاهي

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (١–١٧)$$

اى ان عزم القوة حول نقطـة ما هو كمية اتجاهية لها مقدار واتجـاه ، اذا سـلطت قوة منفردة في النقطـة P لجسـم حـر الدوران حول محـور ثابت لـه في النقطـة O ، عندئذ يظهر الجسـم ميلا للدوران ، ولمـا كان محور هذا الدوران عموديا على القوة $\vec{F}$ وعلى المسـتقيم OP اذن يكـون اتجـاه العـزم $\vec{N}$ على طول محور الدوران ،

المعادلة التالية تعطي مقدار العــزم

$$|\vec{N}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = rF \sin\theta \qquad (١_١٨)$$

حيث θ تمثل الزاوية بين $\vec{r}$ و $\vec{F}$ • اذن يمكن اعتبار $|\vec{N}|$ مســـــاوية لحاصل ضرب مقدار القوة في الكميــة $r\sin\theta$ والاخيرة تمثل المسافة العمودية من النقطـــة O على خط تأثير القوة •

عندما تؤثر عدة قــوى في نقاط مختلفــة من جســم منفرد تجمع العــزوم بطريقــة جمــع المتجهات وهذا ينتــج من قانون توزيع الحــدود لضــــرب المتجهات اى من المعادلة (١٠_١١) ومن شــرط التوازن للحركــة الدورانيــة يكون المجموع الاتجاهي لجميــع العزوم يســاوى صفرا • أى

$$\sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \sum_i \vec{N}_i = 0$$

ان هذا الموضوع ســيبحث فيما بعد بصورة وافية في الفصل الثامن •

(١_١٣) تمثيل متجــه معلــوم كحاصل ضرب كميــة عدديــة وحـــــدة متجهــة منفــردة •

Representation of a Given Vector as the Product of a Scalar and a single Unit Vector

افرض المعادلة

$$\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$$

اضرب واقســم الطرف الايمن بمقــدار $\vec{A}$

$$\vec{A} = A\left(\hat{i}\frac{A_x}{A} + \hat{j}\frac{A_y}{A} + \hat{k}\frac{A_z}{A}\right)$$

الان

$$\frac{A_x}{A} = \cos\alpha , \quad \frac{A_y}{A} = \cos\beta , \quad \frac{A_z}{A} = \cos\gamma$$

حيث α , β, γ تمثل زوايا اتجاه A لذلك يمكننا كتابة

$$\vec{A} = A(i \cos\alpha + j \cos\beta + k \cos\gamma)$$

$$= A(\cos\alpha , \cos\beta , \cos\gamma)$$

او (١ ــ١٩)

$$\vec{A} = A\vec{n}$$

حيث $\vec{n}$ تمثل وحدة متجهة مركباتها هي $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

افرض اى متجه اخر مثل $\vec{B}$

من الواضح ان مسقط $\vec{B}$ على $\vec{A}$ هو

$$B \cos\theta = \frac{\vec{B} \cdot \vec{A}}{A} = \vec{B} \cdot \vec{n} \qquad (١ــ٢٠)$$

حيث θ تمثل الزاوية بين $\vec{A}$ و $\vec{B}$

مثـــــال

جد وحدة متجهة عمودية على المستوى الذى يحوى المتجهين

$$\vec{B} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} \qquad \vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

من المثال (١) عندنا ــ

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} - 3\hat{k}$$

اذن

$$n = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \frac{\hat{i} - 3\hat{j} - 3\hat{k}}{(1^2 + 3^2 + 3^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\hat{i}}{\sqrt{19}} - \frac{3\hat{j}}{\sqrt{19}} - \frac{3\hat{k}}{\sqrt{19}}$$

١ـ١٤) الضرب الثلاثي Triple Products

يسمى التعبير $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})$ بالضرب العددى الثلاثي للمتجهات $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$. وهو كمية عددية لانه ضرب عددى لكميتين متجهتين وعند الرجوع الى محدد ضرب المتجهات المعادلة (١ـ ١٤) ، نرى من الممكن كتابة الضرب العددى الثلاثي على النحو التالي

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (١ـ٢١)$$

عند تبادل صفين او عمودين في محدد تتغير اشارته ولكن لا تتغير قيمته المطلقة ،من هذه الخاصية المعروفة للمحددات نستطيع ان نشتق بسهولة المعادلة المفيدة التالية

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C} \qquad (١ـ٢٢)$$

اى يمكن تبادل علامة الضرب العددى وعلامة الضرب الاتجاهي في الضرب الاتجاهي الثلاثي

يسمى التعبير

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$$

بالضرب الاتجاهي الثلاثي Triple Vector Product

وقد تركنا للطالب البرهنة على صحة المعادلة التالية لضرب المتجهات الثلاثي :

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}.\vec{B})\vec{C} \qquad (١ـ٢٣)$$

١ ــ ١٥) ٠ تغيير نظام الاحداثيات Change of Coordinate System

افرض ان المتجـه $\vec{A}$ قد مثل بدلالة الثلاثي ijk على النحو التالي :ـــ

$$\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$$

ومثل نفس المتجـه $\vec{A}$ بدلالة ثلاثي جديد $\hat{i}'\hat{j}'\hat{k}'$ اتجاهه يختلف عـــن اتجـاه $\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}$ على النحو التالي :ـــ

$$\vec{A} = \hat{i}'A_x' + \hat{j}'A_y' + \hat{k}'A_z'$$

الان الضرب العددى $\vec{A}.\hat{i}'$ عبارة عن A_x' اى ســقط $\vec{A}$ على الوحـدة المتجـه $\hat{i}'$ وهكذا يمكننا كتابــة

$$A_x' = \vec{A}.\hat{i}' = (\hat{i}.\hat{i}')\ A_x + (\hat{j}.\hat{i}')\ A_y + (\hat{k}.\hat{i}')\ A_z$$

$$A_y' = \vec{A}.\hat{j}' = (\hat{i}.\hat{j}')\ A_x + (\hat{j}.\hat{j}')\ A_y + (\hat{k}.\hat{j}')\ A_z \qquad (١ــ٢٤)$$

$$A_z' = \vec{A}.\hat{k}' = (\hat{i}.\hat{k}')\ A_x + (\hat{j}.\hat{k}')A_y + (\hat{k}.\hat{k}')A_z$$

وقد سـمي الضرب العددى ($\hat{i}.\hat{i}'$) و ($\hat{i}.\hat{j}'$) وهلـم جـــرا بمعامل التحويل Coefficients of Transformation وهي تساوى جيوب تمام الزوايا بين المحاور ذات الفتحـه وبين التي بدون فتحــه ٠

وبالتماثل يعبر عن مركبات المحاور الاخيرة على النحو التالي : ــ

$$A_x = \vec{A}.\hat{i} = (\hat{i}'.\hat{i})A_x' + (\hat{j}'.\hat{i})A_y' + (\hat{k}'.\hat{i})A_z'$$

$$A_y = \vec{A}.\hat{j} = (\hat{i}'.\hat{j})A_x' + (\hat{j}'.\hat{j})A_y' + (\hat{k}'.\hat{j})A_z' \qquad (١ــ٢٥)$$

$$A_z = \vec{A}.\hat{k} = (\hat{i}'.\hat{k})A_x' + (\hat{j}'.\hat{k})A_y' + (\hat{k}'.\hat{k})A_z'$$

ان جميع معاملات التحويل في المعادلات (١ ــ٢٥) قد ظهـرت فـي المعادلات (١ــ٢٤) لان $\hat{i}.\hat{i}' = \hat{i}'.\hat{i}$ وهلـــم جــــرا ٠

ولكن تلك التي في صفوف معادلات (١ـ٢٥) قد ظهرت في اعمدة حدود ـ معادلات (١ـ٢٤) وبالعكس ٠

ان قوانين التحويل التي عبرت عنها هاتان المجموعتان من المعادلات هي خواص عامة للمتجهات ، وهما تكونان في الحقيقة طريقة اخرى لتعريف المتجهات (٤) ٠

ان رمز المصفوف Matrix يمكن ان يعبر عن معادلات التحويل بصورة ملائمة حيث تكتب المعادلات (١ـ٢٤) على الشكل التالي :ـ

$$\begin{bmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{i}.\hat{i}' & \hat{j}.\hat{i}' & \hat{k}.\hat{i}' \\ \hat{i}.\hat{j}' & \hat{j}.\hat{j}' & \hat{k}.\hat{j}' \\ \hat{i}.\hat{k}' & \hat{j}.\hat{k}' & \hat{k}.\hat{k}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \qquad (١ـ٢٦)$$

ويسمى المصفوف ٣ في ٣ المذكور توا بمصفوف التحويل ومن فوائده امكانية استخدام عدة تحويلات متتابعة بسهولة وذلك بضرب مصفوف كل تحويل في الاخر ٠

امثلة

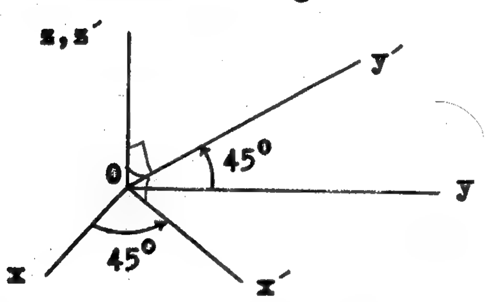
١ـ مثل المتجه $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ بدلالة الثلاثي $\hat{i}'\ \hat{j}'\ \hat{k}'$ افرض ان المحورين x' و y' دارا بزاوية ٤٥ حول المحور ـ z ويتطابق المحوران z و z'

---

(٤) انظر على سبيل المثال

L. P. Smith, Mathematical Methods for Scientists and Engineers, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1953

كما هو مبين في الشكل (١ ــ ١٠) وبالرجوع الى الشكل



الشكل (١ ــ ١٠) دورت المحاور ذات الفتحة $0x'y'z'$ بزاوية ٤٥° حول المحور ــ z.

تحسب معامل التحول كالاتي : ــ

$$\hat{i}.\hat{i}' = 1/\sqrt{2} \qquad \hat{j}.\hat{i}' = 1/\sqrt{2} \qquad \hat{k}.\hat{i}' = 0$$

$$\hat{i}.\hat{j}' = -1/\sqrt{2} \qquad \hat{j}.\hat{j}' = 1/\sqrt{2} \qquad \hat{k}.\hat{j}' = 0$$

$$\hat{i}.\hat{k}' = 0 \qquad \hat{j}.\hat{k}' = 0 \qquad \hat{k}.\hat{k}' = 1$$

هذه تعطي

$$A_{x'} = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$A_{y'} = \frac{-3}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad , \quad A_{z'} = 1$$

وبذلك يمكن كتابة المتجه $\vec{A}$ بدلالة المحاور ذات الفتحة على النحو التالي : ــ

$$\vec{A} = \frac{5}{\sqrt{2}}\,\hat{i}' - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{j}' + \hat{k}'$$

٢ ــ جد مصفوف التحول عند دوران المحاور ذات الفتحة بزاوية θ حول المحور ــ z (المثال السابق حالة خاصة لهذه الحالة) . عندنا

$$\hat{i}.\hat{i}' = \hat{j}.\hat{j}' = \cos\theta$$

$$\hat{j}.\hat{i}' = -\hat{i}.\hat{j}' = \sin\theta \quad , \quad \hat{k}.\hat{k}' = 1$$

وكل ضرب عددي اخر يساوي صفرا . اذن مصفوف التحول يكون

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تماريـــــن

١ ــ ١ من المتجهيــن $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$.

جــــــد

(آ) قيمـــة $|\vec{A} - \vec{B}|$

(ب) قيمـــة $\vec{A} \cdot \vec{B}$

(جـ) الزاويـــة بيـــن $\vec{B}$, $\vec{A}$

١ ــ ٢ لنفس المتجهين في التمرين (١ ــ ١) عبر بصيغة ijk عما يلي :ــ

(آ) $2\vec{A} + 3\vec{B}$

(ب) $\vec{A} \times \vec{B}$

(جـ) $(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{B})$

١ ــ ٣ ازا كان المتجه $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ عموديا على المتجه $2i - 3j + qk$

ما هي قيمـــة q ؟

١ ــ ٤ جد طول مسقط المتجه $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ على المتجه $\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

١ ــ ٥ جــد قيمـــة

$$[(\hat{i} + \hat{j}) \times (\hat{i} + \hat{k})] \cdot [(\hat{i} - \hat{j}) \times (\hat{j} - \hat{k})].$$

١ـ٦ اذا علمت ان $\vec{A} = 2\hat{i}-\hat{j}$, $\vec{B}=2\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{C}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$
جد

(آ) $(\vec{A} \times \vec{B}).\vec{C}$, $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C})$

(ب) $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$, $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$

١ـ٧ سلطت القوة $\vec{F_1} = \hat{i} + \hat{j}$ على جسم في النقطة P_1 بحيث كان المتجه $\vec{OP_1} = \vec{r_1} = 2\hat{i} + \hat{j}$ ثم سلطت قوة ثانية $\vec{F_2} = \hat{j} - \hat{k}$ في النقطة $\vec{r_2} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ جد العزم الكلي N ، مقدار N وزوايا جيوب تمام محصلة محور الدوران ؟

١ـ٨ برهن المتطابقة التالية
$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}.\vec{B})\vec{C}$

١ـ٩ اذا كان المتجهان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يمثلان ضلعين متلاقيين من متوازى اضلاع . برهن على ان مساحة متوازى الاضلاع تساوى $|\vec{A} \times \vec{B}|$

١ـ١٠ برهن بطريقة جبر المتجهات ان الزاوية المرسومة داخل نصف دائرة تكون قائمة .

١ـ١١ برهن قانون الجيوب في المثلثات باستخدام جبر المتجهات .

١ـ١٢ اذا كانت المتجهات $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ تمثل ثلاثة اضلاع متلاقية لمتوازي مستطيلات . برهن على ان حجم متوازى المستطيلات يساوى $[\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C})]$

١ـ١٣ مثل المتجه $\hat{i} + \hat{j}$ بدلالة الثلاثي $i' j' k'$ عندما يدور المحوران x' , z' حول المحور ـ y (الذى ينطبق على المحور ـ y') بزاوية ٦٠ درجة .

١ـ١٤ برهن على ان مقدار المتجهة لا يتغير بالدوران . استخدم المصفوف

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لدوران حول المحور ـ z بزاوية مقدارها θ .

١ـ١٥ جد مصفوف التحويل لدوران حول المحور ـ z بزاوية θ يتبعه دوران آخر حول المحور ـ y' بزاوية ϕ .

١ـ١٦ المجموعتان من المتجهات $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$ تسمى متبادلة اذا كان $\vec{a}\cdot\vec{a}' = \vec{b}\cdot\vec{b}' = \vec{c}\cdot\vec{c}' = 1$

وكل ضرب عددى مختلط مثل $\vec{a}\cdot\vec{b}' = 0$ برهن على ان

$$\vec{c}' = \frac{(\vec{a} \times \vec{b})}{Q} , \quad \vec{a}' = \frac{(\vec{b} \times \vec{c})}{Q} , \quad \vec{b}' = \frac{(\vec{c} \times \vec{a})}{Q}$$

حيث $Q = \vec{a}\cdot(\vec{b} \times \vec{c})$

١ـ١٧ جد مجموعة متجهات تكون متبادلة مع المجموعة $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$.

الفصل الثاني
تفاضل وتكامل المتجهات وعلم الحركة

في هذا الفصل سنطور شكلية علم الحركة المجردة لوصف حركة الجسيم

وهذه المعالجة ستبسط كثيرا باستعمال علم التفاضل والتكامل المطبقة على الكميات المتجهة ·

٢ـ ١) مشتقة المتجه Derivative of a Vector

افرض ان مركبات المتجه $\vec{A}$ هي دوال لمتغير واحد مثل u ، والمتجه قد

يمثل موضعا او سرعة او ما الى ذلك ويمثل البرامتر u " Parameter " اعتياديا

الزمن t ، وقد تكون اية كمية اخرى تعين مركبات المتجه $\vec{A}$ ·

$$\vec{A}(u) = \hat{i}A_x(u) + \hat{j}A_y(u) + \hat{k}A_z(u)$$

وتعرف مشتقة المتجه $\vec{A}$ بالنسبة للكمية u بصورة مماثلة تماما لتعريف

التفاضل الاعتيادي لدوال الكميات العددية بواسطة الغاية Limit نحصل على

$$\frac{d\vec{A}}{du} = \underset{\Delta u \to o}{\text{limit}} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta u} = \underset{\Delta u \to o}{\text{limit}} \left(\hat{i} \frac{\Delta A_x}{\Delta u} + \hat{j} \frac{\Delta A_y}{\Delta u} + \hat{k} \frac{\Delta A_z}{\Delta u} \right)$$

حيث ـ $\Delta A_x = A_x(u + \Delta u) - A_x(u)$ وهلم جرا · اى ان

$$\frac{d\vec{A}}{du} = \hat{i}\frac{dA_x}{du} + \hat{j}\frac{dA_y}{du} + \hat{k}\frac{dA_z}{du} \qquad (٢ـ١)$$

اذن مشتقة المتجه هي متجه اخر مركباته مشتقات اعتيادية ·

يتضح من المعادلة السابقة ان مشتقة مجموع متجهين تساوى مجموع مشتقة

كل منهما اى :

$$\frac{d}{du}(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\vec{B}}{du} \qquad (٢ـ٢)$$

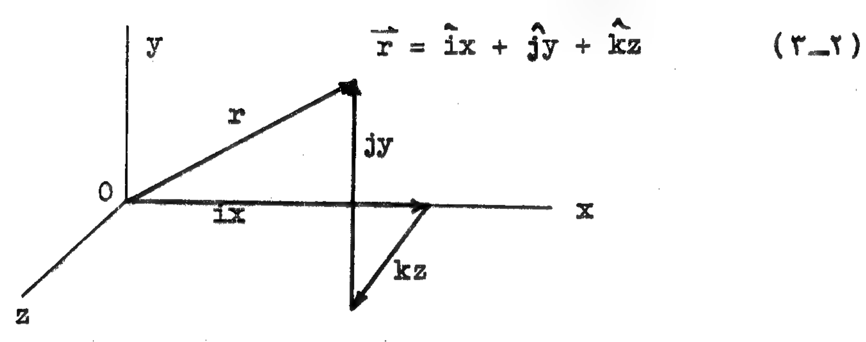
وستعالج قواعد تفاضل ضرب المتجهات بعدئذ في البند (٢ـ٧)

(٢ـ٢) متجه الموضع لجسيم Position Vector of a particle

في محاور مرجعية معينة ، يمكن تعيين موضع جسيم بصورة كاملة بمتجه واحد

اى ازاحة الجسيم بالنسبة الى نقطة اصل المحاور • وهذا المتجه يسمى متجه الموضع Position Vector للجسيم• في المحاور الديكارتيه المبينة في الشكل • (٢ـ١) يكون متجه الموضع بكل بساطه هو

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z \qquad (٢ـ٣)$$



الشكل (٢ـ١) متجه الموضع

ومركبات متجه الموضع لجسيم متحرك تكون دوال للزمن •اى

$$x = x(t) \ , \ y = y(t) \ , \ z = z(t)$$

(٢ـ٣) متجه السرعة The Velocity Vector

بينا في البند (٢ـ١) التعريف الاصولي لتفاضل اى متجه بالنسبة لاى برامتر وبصورة خاصة اذا كان المتجه هو متجه الموضع $\vec{r}$ لجسيم متحرك والبرامترهو الزمن t • وتفاضل $\vec{r}$ بالنسبة للزمن t يسمى " السرعة "والتي سوف نرمز لها بالحرف $\vec{v}$ • اذن

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}\dot{x} + \hat{j}\dot{y} + \hat{k}\dot{z} \qquad (٢ـ٤)$$

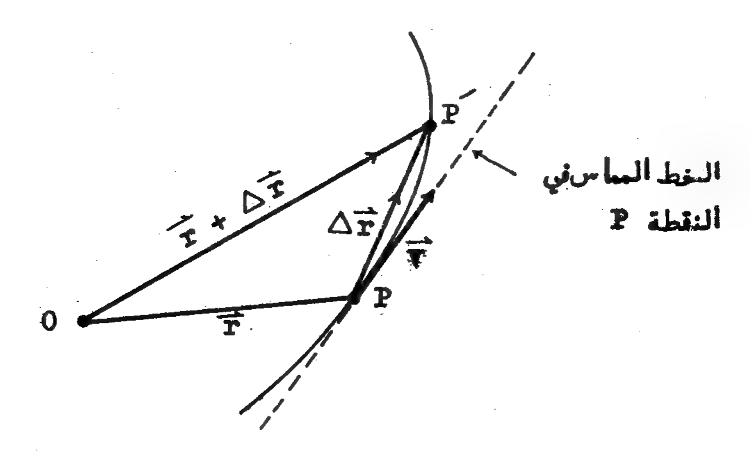
حيث النقاط تمثل التفاضل بالنسبة للزمن t • (ان هذا الاصطلاح قياسي وسوف يستعمل من اول الكتاب الى اخره) • ولنختبر المعنى الهندسي لمتجه السرعة افرض ان جسيما كان في موضع معين في الزمن t وبعد مرور فترة زمنية

مقدارها " Δt " تحرك الجسيم من الموضع $\vec{r}(t)$ الى الموضع $\vec{r}(t+\Delta t)$.

نتجه الازاحة خلال الفترة الزمنية t هو

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

لذلك يكون خارج القسمة $\Delta\vec{r} / \Delta t$ متجها موازيا للازاحة . وكلما افترضنا فترات زمنيـة اصغر فاصغر اقترب خارج القسمة $\Delta\vec{r} / \Delta t$ من الغاية $d\vec{r} / dt$ والتي تسمى بالسرعة . والمتجه $d\vec{r} / dt$ يمثل اتجاه الحركة ومعدلها الزمني كما هو موضح في الشكل التخطيطي (٢ـ٢) في الفترة الزمنية Δt



(الشكل ٢ـ٢) متجه الازاحة لجسيم متحرك

يتحـرك الجسـم على طول المسار من النقطة P الى P´ .

وعندما تقترب Δt من الصفر تقترب النقطة P´ من P وبذلك يقترب اتجاه المتجه $\Delta\vec{r} / \Delta t$ من اتجاه المماس للمسار في P . نمتجه السرعة اذن يكون دائما مماسا لمسار الحركة .

يسمى مقدار السرعة بالانطلاق Speed وبدلالة المركبات المتعامدة يكون الانطلاق على الشكل التالي :ـ

$$v = |\vec{v}| = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (٢-٥)$$

اننا نستطيع ان نعبر عن الانطلاق بطريقة اخرى اذا مثلنا المسافة العددية على طول المسار بالرمز s وذلك على النحو التالي :

$$v = \frac{ds}{dt} = \underset{\Delta t \to o}{\text{limit}} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \underset{\Delta t \to o}{\text{limit}} \frac{\left[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\Delta t}$$

والتي عند تبسيطها تصبح مساوية للمقدار الجبرى ليمين المعادلة (٢ــ٥) .

(٢ــ٤) متجـه التعجيل Acceleration Vector

ان مشتقة السرعة للزمن تسمى التعجيل ، وتمثيله بالرمز $\vec{a}$ يكون عندنا

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (٢ــ٦)$$

وبدلالة المركبات المتعامدة

$$\vec{a} = \hat{i}\ddot{x} + \hat{j}\ddot{y} + \hat{k}\ddot{z} \qquad (٢ــ٧)$$

اى ان التعجيل كمية متجهة مركباته بدلالة المحاور المتعامدة هي المشتقة الثانية لاحداثيات موضع الجسيم المتحرك . وسوف نشرح تحليل التعجيل $\vec{a}$ الى مركباته المماسة والعمودية في البند (٢ــ٨) .

امثلـــة

١ــ لنختبر الحركة الممثلة بالمعادلة -

$$\vec{r}(t) = \hat{i}bt + \hat{j}(ct - \frac{gt^2}{2}) + \hat{k}0$$

لما كانت مركبة ــ z ثابته وتساوى صفرا ، فالمعادلة تمثل حركة في المستوى ــ xy .

ونحصل على السرعة $\vec{v}$ عند تفاضل $\vec{r}$ بالنسبة للزمن t ، اى ..

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}b + \hat{j}(c - gt)$$

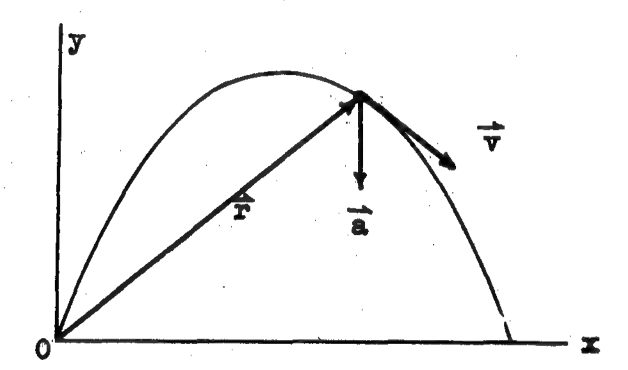
وتفاضلها للمرة الثانيــة نحصل على التعجيل ، اى

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\hat{j}g$$

اى ان $\vec{a}$ يكون بالاتجاه السالب للمحــور ـ y • وله المقدار الثابت g • ومســار الحركة يكون قطعا مكافئا كما هو مبين في الشكل (٢ـ٣) •

(ان هذه المعادلـــة تمثل في الحقيقة حركة القذيفة) • ويتغير الانطــلاق v مع t وفقا للمعادلة التاليــة :

$$v = \left[b^2 + (c - gt)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$



الشكل (٢ـ٣) متجهات الموضع والسرعة والتعجيل
لجسيم يتحرك على مسار قطــع مكافــــــــــــي •

٢ـ افرض ان متجه الموضع لجسيم هو

$$\vec{r} = \hat{i}b \sin \omega t + \hat{j}b \cos \omega t + \hat{k}c$$

ولنحلل الحركة • المسافة من نقطة الا صل والتي

$$|\vec{r}| = r = (b^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t + c^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}$$

وعند تفاضل $\vec{r}$ ،نجد ان :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}b\omega\cos\omega t - \hat{j}b\omega\sin\omega t + \hat{k}o$$

ولما كانت مركبة السرعة $\vec{v}$ باتجاه المحور z تساوى صفرا ، فمتجه السرعة يكون موازيا للمستوى xy ، والجسيم يقطع مساره بانطلاق ثابت ، اى

$$v = |\vec{v}| = (b^2\omega^2\cos^2\omega t + b^2\omega^2\sin^2\omega t)^{\frac{1}{2}} = b\omega$$

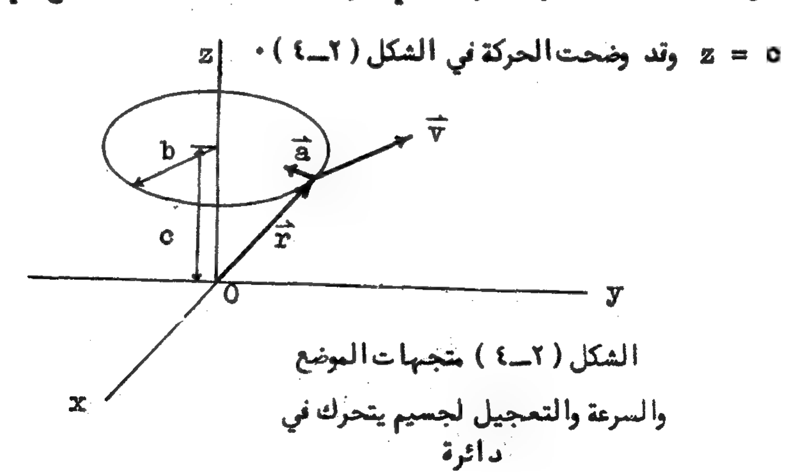
والتعجيل

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\hat{i}b\omega^2\sin\omega t - \hat{j}b\omega^2\cos\omega t$$

يكون عموديا على السرعة ،لان الضرب العددى للسرعة $\vec{v}$ والتعجيل $\vec{a}$ يساوى صفرا ،اى

$$\vec{v}.\vec{a} = (b\omega\cos\omega t)(-b\omega^2\sin\omega t)+(-b\omega\sin\omega t)(-b\omega^2\cos\omega t)=0$$

بالاضافة الى ذلك فأن التعجيل يكون عموديا على المحور z كما هو واضح في الشكل لان $\vec{a}.\vec{k} = 0$ والمسار الفعلي هو دائرة نصف قطرها b وتقع في المستوى $z = c$ وقد وضحت الحركة في الشكل (٢ــ٤) ٠



الشكل (٢ــ٤) متجهات الموضع والسرعة والتعجيل لجسيم يتحرك في دائرة

٢ــ٥ تكامل المتجه Vector Integration

افرض ان مشتقة المتجه $\vec{r}$ بالنسبة للزمن اعطيت بدلالة المحـــاور

الديكارتيه وان مركباتها دوال معلومة للزمن ،اي ان

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}f_1(t) + \hat{j}f_2(t) + \hat{k}f_3(t)$$

وعند تكاملها بالنسبة للزمن t نحصل على

$$\vec{r} = \hat{i}\int f_1(t)dt + \hat{j}\int f_2(t)dt + \hat{k}\int f_3(t)dt \qquad (٢_٨)$$

ان هذه العملية بطبيعة الحال تماما عكس عملية ايجاد متجه السرعة عند ما يكون متجه الموضع معلوما كدالة للزمن . وينطبق الشيء نفسه على الحالة التي يكون فيها التعجيل معروفا كدالة للزمن فالتكامل يعطي السرعة .

مثال

اذا علمت ان متجه السرعة لجسيم متحرك هو $\vec{v} = \hat{i}A + \hat{j}Bt + \hat{k}Ct^{-1}$ حيث C, B, A هي ثوابت . جد $\vec{r}$.

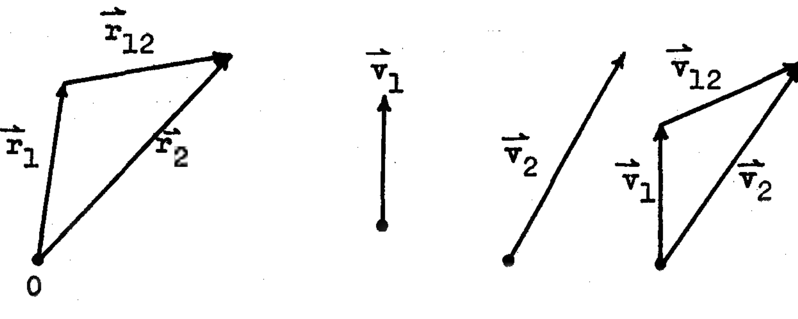
بالتكامل نحصل على

$$\vec{r} = \hat{i}\int A\,dt + \hat{j}\int Bt\,dt + \hat{k}\int Ct^{-1}dt$$
$$= \hat{i}At + \hat{j}B\frac{t^2}{2} + \hat{k}C\ln t + \vec{r}_0$$

حيث المتجه $\vec{r}_0$ هو ثابت التكامل .

٢_٦) السرعة النسبيه Relative Velocity

افرض ان متجهي موضع جسيمين هما $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ على التوالي ، كما هو مبين في الشكل (٢_٥) .



الشكل (٢ـ٥)

آـ متجه الموضع النسبي   ب ـ متجه السرعة النسبي للجسيمين

ان ازاحة الجسيم الثاني بالنسبة للاول هو الفرق $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ والذى سنسميه ($\vec{r}_{12}$) •

اذن سرعة الجسيم الثاني بالنسبة للاول هي :

$$\vec{v}_{12} = \frac{d\vec{r}_{12}}{dt} = \frac{d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{dt} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \qquad (٢ـ٩)$$

التي سنسميها السرعة النسبية • عند نقل $\vec{v}_1$ نحصل على : $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{12}$

هذه تمثل السرعة الفعلية للجسيم الثاني بدلالة سرعة الجسيم الاول والسرعة النسبية للجسيمين •

وعلينا ملاحظة ان مقدار السرعة النسبية للجسيمين لا يساوى تغيير المعدل الزمني للمسافة بينهما • والكمية الاخيرة هي :

$$\frac{d}{dt}\left|\vec{r}_{12}\right| = \frac{d}{dt}\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|$$

وهذه تختلف بصورة عامة عن $|\vec{v}_{12}|$

امثلــة

١ـ طائرة تتجه شمالا بسرعة v_a بالنسبة للهواء • فاذا كانت الريح متجهة

شرقا بانطلاق v_{ω} • ما هي الحركة الحقيقية للطائرة ؟ •

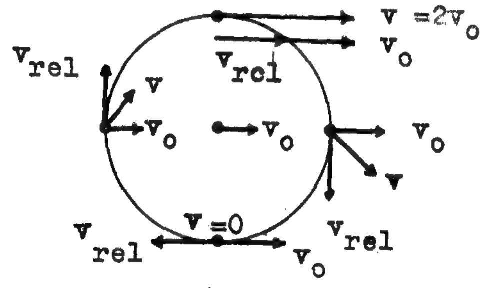
من تعريف السرعة النسبيـة نرى ان السرعة الحقيقية للطائرة بالنسبة للارض هي مجموع متجهي سرعة الهـواء وسرعة الطائرة بالنسبـة للهواء ، اى

$$\vec{v}_{true} = \vec{v}_a + \vec{v}_{\omega}$$

لنفرض في مسألتنا ان الوحدتين المتجهتين i و j تؤشران باتجاه الشرق والشمال على التتالي • عندئذ نحصل على

$$\vec{v}_{true} = \hat{i}v_a + \hat{j}v_{\omega}$$

٢ــ عجلة نصف قطرها b تتدحرج على الارض بانطلاق امامي v_o • جد السرعة لاية نقطة على حافـة العجلة مثل P بالنسبة للارض •



الشكل (٢ــ٦) متجهات السرعة لنقاط مختلفة على العجلة المتدحرجة

اولاــ افرض العلاقـة

$$\vec{r}_{op} = \hat{i}b\cos\theta - \hat{j}b\sin\theta$$

حيث

$$\theta = \omega t$$

هذه تمثل حركة دائريـة باتجاه عقرب الساعة حول نقطة الاصل ، وهي مركز العجلـة في هذه الحالة • فمشتقة الزمن عندئذ تعطي سرعة النقطة P بالنسبة لمركز العجلـة اى :

$$\vec{v}_{rel} = -\hat{i}b\omega\sin\theta - \hat{j}b\omega\cos\theta$$

ولكن السرعة الزاوية بالنسبة للارض هي $\omega = v_o/b$ ولما كانت سرعة مركــــز العجلة هي $\hat{i}v_o$ عندئذ تكون السرعة الحقيقية للنقطة P بالنسبة للارض كالاتي

$$\vec{v} = \hat{i}v_o - \hat{i}b\,\omega \sin\theta - \hat{j}b\,\omega\cos\theta$$
$$= \hat{i}v_o(1 - \sin\theta) - \hat{j}v_o\cos\theta$$

والشكل (٢ ــ ٦) يبين متجهات السرع لقيم مختلفة للزاوية θ .

٢ ــ ٧ تفاضل ضرب المتجهات Derivatives of Products of Vectors

نجد من الضروري في احوال كثيرة ان نتعامل مع حاصل الضرب $\vec{A}\times\vec{B},\ \vec{A}\cdot\vec{B},\ n\vec{A}$ حيث الكمية العددية n والكميات المتجهــــه $\vec{B},\vec{A}$ دوال للبرمتر المنفرد u كما في البند (٢ ــ ١) ٠ من التعريف العام للتفاضل عندنـــا ٠

$$\frac{d(n\vec{A})}{du} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{n(u+\Delta u)\,\vec{A}(u+\Delta u) - n(u)\,\vec{A}(u)}{\Delta u}$$

$$\frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{du} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\vec{A}(u+\Delta u)\cdot\vec{B}(u+\Delta u) - \vec{A}(u)\cdot\vec{B}(u)}{\Delta u}$$

$$\frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{du} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\vec{A}(u+\Delta u)\times\vec{B}(u+\Delta u) - \vec{A}(u)\times\vec{B}(u)}{\Delta u}$$

وبجمع وطرح كميات مثل ($n(u+\Delta u)\,\vec{A}(u)$) في بسوط المعادلات الانفة الذكر نحصل على القوانين التاليـــــة

$$\frac{d(n\vec{A})}{du} = \frac{dn}{du}\vec{A} + n\frac{d\vec{A}}{du} \qquad (٢ ــ ١٠)$$

$$\frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{du} = \frac{d\vec{A}}{du}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{du} \qquad (٢ ــ ١١)$$

$$\frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{du} = \frac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{du} \qquad (٢ ــ ١٢)$$

لاحظ ان من الضرورى المحافظة على بقاء ترتيب الحدود فى الضرب الاتجاهى عند التفاضل وقد تركت الخطوات كتمرين للطالب ٠

٢ ـ ٨ المركبات المماسة والعمودية للتعجيل

Tangential and Normal Components of Acceleration:

رأينا فى البند (١ ـ ١٣) ان اى متجه يمكن تمثيلـه بحاصل ضرب مقداره ووحـدة متجهة لتعيين اتجاهه ٠ ووفقا لذلك يمكن كتابة متجه السرعة لجسيم متحرك كحاصل لضرب انطلاق الجسيم v فى وحدة متجهة τ لتعطى اتجاه حركة الجسيم اى ـ

$$\vec{v} = v\vec{\tau} \qquad (١٣ ـ ٢)$$

ويسمى المتجه τ بالوحدة المتجهه المماسة ٠ عندما يتحرك الجسيم فقد يتغير انطلاقه v وقد يتغير اتجاه τ ٠ لنستخدم قاعدة تفاضل ضرب كمية عددية فى اخرى متجهة للحصول على التعجيل ٠ فالنتيجة تكون ـ

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\tau) = \dot{v}\tau + v\frac{d\tau}{dt} \qquad (١٤ ـ ٢)$$

بالرغم من ان الوحدة المتجهه لها مقدار ثابت فان لها المشتقة $d\tau/dt$ وهذه بالضرورة يجب ان تعبر عن تغيير اتجاه τ بالنسبة للزمن ٠ كمـا هو مبين فى الشكل (٢ ـ ٧ أ) ٠ كان موضع الجسيم الابتدائى

الشكل (٢ ـ ٧) الوحدات المتجهة المماسة والعمودية ٠

فى اية نقطة مثل P ثم تحرك مسافة Δs على طول مساره الى نقطة اخرى مثل P' فى مدة زمنية مقدارها Δt . ولنمثل الوحدات المتجهة للمماسات فى P و P' بالرموز $\vec{\tau}$ و $\vec{\tau}'$ على التتالى كما هو مبين فى الشكل . ويختلف اتجاه هاتين الوحدتين المتجهتين بزاوية $\Delta\psi$ كما هو مبين فى الشكل (٢ ـ ٧ ب) . وواضح ان الفرق $\Delta\tau$ يقترب من $\Delta\psi$ بالمقدار عندما تكون قيم $\Delta\psi$ صغيرة . كذلك يصبح اتجاه $\Delta\tau$ عموديا على اتجاه τ فى الغاية ، عندما يقترب $\Delta\psi$ و Δs من الصفر . نستنتج مما ذكر ان مقدار المشتقة $d\tau/d\psi$ يساوى واحدا واتجاهها عمودى على τ . اذن سنسميها بالوحدة المتجهة العمودية وسنمثلها بالرمز $\vec{n}$ ، اى

$$\frac{d\vec{\tau}}{d\psi} = \vec{n}$$

ثم لايجاد مشتقة الزمن $d\vec{\tau}/dt$ نستعمل القانون المتسلسل Chain Rule كالاتى

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{d\psi}\,\frac{d\psi}{dt} = \vec{n}\,\frac{d\psi}{ds}\quad\frac{ds}{dt} = \vec{n}\,\frac{v}{\rho}$$

حيث

$$\rho = \frac{ds}{d\psi}$$

وهو يمثل نصف قطر تكور مسار الجسيم المتحرك فى النقطة P . وعند تعويض $d\vec{\tau}/dt$ المذكورة فى المعادلة (٢ ـ ١٤) نحصل على النتيجة النهائية التالية

$$\vec{a} = \dot{v}\,\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\,\vec{n} \qquad (٢ـ١٦)$$

اذ ان هناك مركبة لتعجيل الجسيم المتحرك باتجاه الحركة مقدارها $a_\tau = \dot{v} = \ddot{s}$

وهذه تمثل التعجيل المماس ٠ ومركبه اخرى مقدارها $a_n = v^2/\rho$ وهي

المركبة العمودية ٠ هذه المركبة تتجه دائما نحو مركز التكور من الجانب المقعر لمسار

الحركة ٠ ولهذا السبب سميت المركبة العمودية كذلك بتعجيل الجذب المركزى ٠

مما تقدم نرى ان مشتقة الزمن للانطلاق هي مركبة التعجيل المماسة ٠ ويعين مقدار

التعجيل الكلى كما يلى

$$|\vec{a}| = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \left(\dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (٢ ـ ١٢)$$

مثلا اذا تحرك جسيم على محيط دائرة بانطلاق ثابت v فمقدار متجه التعجيل

يكون v^2/R_0 حيث R_0 يمثل نصف قطر الدائرة ٠ ومتجه التعجيل فى هذه

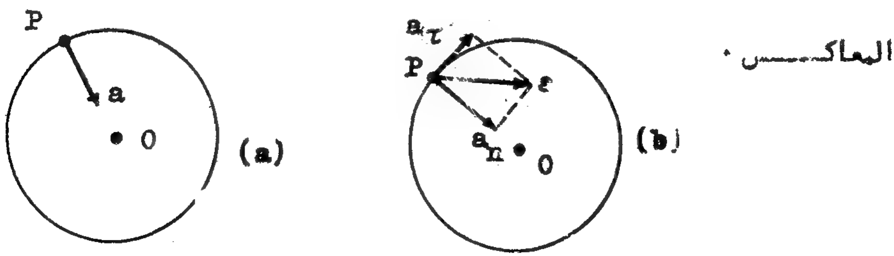
الحالة يؤثر دائما نحو مركز الدائرة ٠ اما اذا كان الانطلاق غير ثابت وانما يزداد بمعدل

زمنى معين مقداره $\dot{v}$ فعندئذ مركبة التعجيل الامامية تكون مساوية لهذه الكمية

ولكنها تنحرف مبتعدة عن مركز الدائرة نحو الاتجاه الامامى كما هو مبين فى الشكل

(٢ ـ ٨) ٠ اما اذا كانت حركة الجسيم متباطئة فان متجه التعجيل ينحرف بالاتجاه

المعاكس ٠



الشكل (٢ ـ ٨) متجهات التعجيل لجسيم يتحرك على مسار دائرى

آ ـ انطلاق ثابت ب ـ انطلاق متزايد

٢ ـ ٩ السرعة والتعجيل فى الاحداثيات القطبية المستوية
Velocity and Acceleration in Plane Polar Coordinates

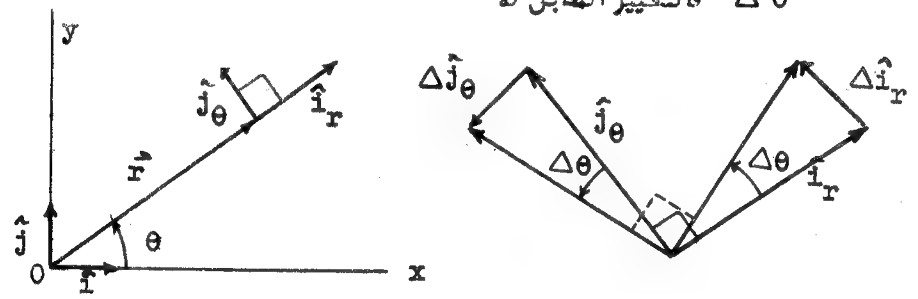
من الملائم فى الغالب استعمال الاحداثيات القطبية r ، θ لتمثيل موضع جسيم يتحرك فى مستو . ويمكن كتابة موضع الجسيم بدلالة جبر المتجهات كحاصل لضرب المسافة القطبية r فى الوحدة المتجهة القطبية $\hat{i}_r$ اى

$$\vec{r} = r\hat{i}_r \tag{٢ ـ ١٨}$$

فعند ما يتحرك الجسيم يتغير كل من $\vec{r}$ ، $\hat{i}_r$ لان كليهما دوال للزمن اذن اذا فاضلنا بالنسبة للزمن نحصل على

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\,\hat{i}_r + r\,\frac{d\hat{i}_r}{dt} \tag{٢ ـ ١٩}$$

لكى نحسب المشتقة $d\hat{i}_r/dt$ نفترض مخطط المتجهات المبين فى الشكل (٢ ـ ٩) . تبين دراسة الشكل انه ، عندما يتغير اتجاه $\vec{r}$ بمقدار $\Delta\theta$ فالتغيير المقابل له



الشكل (٢ ـ ٩) الوحدات المتجهه للاحداثيات القطبية المستوية

في الوحدة المتجهة القطبية $\Delta\hat{i}_r$ يعين كما يلي . مقدار $|\Delta i_r|$ تقريبـــا

يساوي $\Delta\theta$ واتجاه $\Delta\hat{i}_r$ تقريبا عمودي على $\hat{i}_r$ لنستخدم وحدة متجهة

اخرى $\hat{j}_\theta$ اتجاهها عمودي على $\hat{i}_r$. عندئذ يكون عندنا

$$\Delta\hat{i}_r \simeq \hat{j}_\theta\ \Delta\theta$$

فاذا قسمنا على Δt واخذنا الغاية نحصل على

$$\frac{d\hat{i}_r}{dt} = \hat{j}_\theta \frac{d\theta}{dt} \qquad (٢ ـ ٢٠)$$

مشتقة الوحدة المتجهة القطبية بالنسبة للزمن . وبطريقة مماثلة تماما يمكن ان نثبت بـان

التغيير في الوحدة المتجهة $\hat{j}_\theta$ يعين بالتقريب التالي ـ

$$\Delta\hat{j}_\theta \simeq -\ \hat{i}_r\ \Delta\theta$$

والاشارة السالبة ادخلت هنا لتشير الى ان اتجاه تغير $\Delta\hat{j}_\theta$ معاكس لاتجاه $\hat{i}_r$

كما يمكن رؤيته في الشكل . وعليه تكون مشتقة الزمن .

$$\frac{d\hat{j}_\theta}{dt} = -\ \hat{i}_r \frac{d\theta}{dt} \qquad (٢ ـ ٢١)$$

واخيرا باستخدام المعادلة (٢ ـ ٢٠) لمشتقة الوحدة المتجهة القطبية نستطيع

ان نكتب معادلة السرعة كالآتي

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\hat{i}_r + r\ \dot{\theta}\ \hat{j}_\theta} \qquad (٢ ـ ٢٢)$$

اذن $\dot{r}$ يمثل مقدار المركبة القطبية لمتجهة السرعة و $r\ \dot{\theta}$ مقدار المركبة المستعرضة

لكي نجد متجه التعجيل نأخذ مشتقة السرعة بالنسبة للزمن وهذا يعطي

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\hat{i}_r + \dot{r}\frac{d\hat{i}_r}{dt} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{j}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\hat{j}_\theta}{dt}$$

وعند التعويض عن قيم $d\hat{i}_r/dt$ ، $d\hat{j}_\theta/dt$ من المعادلتين (٢ ـ ٢٠) و (٢ ـ ٢١) نحصل على المعادلة التالية لمتجه التعجيل بدلالة الاحداثيات القطبية المستوية ·

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\ \hat{i}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\ \hat{j}_\theta \qquad (٢ ـ ٢٣)$$

اذن يكون مقدار المركبة القطبية لمتجه التعجيل هو

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad (٢ ـ ٢٤)$$

والمركبة المستعرضة هي

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \qquad (٢ ـ ٢٥)$$

ترينا النتيجة السابقة · مثلا انه عندما يتحرك جسيم على دائرة نصف قطرها ثابت b ، اى ان $\dot{r} = 0$ عندئذ يكون مقدار المركبة القطبية مساويا الى $b\dot{\theta}^2$ وتتجه الى الداخل نحو مركز المسار الدائرى · وفى هذه الحالة يكون مقدار المركبة المستعرضة مساويا الى $b\ddot{\theta}$ · ومن ناحية اخرى اذا تحرك الجسيم على خط قطبى ثابت اى اذا كانت θ ثابتة ، فان المركبة القطبية تساوى $\ddot{r}$ ، والمركبة المستعرضة تساوى صفرا · اما اذا كان كل من r ، θ متغيرا ، فان العلاقة العامة (٢ ـ ٢٣) تعطى التعجيل ·

مثال

يتحرك جسيم على مسار حلزونى بحيث موضعـــه بالاحداثيات القطبية هو كالاتى —

$$r = bt^2 \qquad \theta = ct$$

حيث b و c هى ثوابت • جد السرعة والتعجيل كدوال للزمن t •

من المعادلة (٢ ــ ٢٢) نجد ان

$$\vec{v} = \hat{i}_r \frac{d}{dt}(dt^2) + \hat{j}_\theta(bt^2)\frac{d}{dt}(ct)$$

$$= (2bt)\hat{i}_r + (bct^2)\hat{j}_\theta$$

وبالتماثل نحصل من المعادلة (٢ ــ ٢٣) على ما يلى

$$\vec{a} = \hat{i}_r(2b - bt^2c^2) + \hat{j}_\theta[0 + 2(2bt)c]$$

$$= b(2 - t^2c^2)\hat{i}_r + 4bct\hat{j}_\theta$$

من المفيد ان نلاحظ فى هذا المثال ان المركبة القطبية للتعجيل تصبح سالبة عندمـــا

تكون t كبيرة ولو ان نصف القطر يزداد دائما بصورة رتيبة مع الزمـــن •

(٢ ــ ١٠) السرعة والتعجيل فى الاحداثيات الاسطوانية والكرويـــة

Velocity and Acceleration in Cylindrical and Spherical Coordinates:

الاحداثيات الاسطوانية Spherical coordinate

فى حالة الحركة ذات الابعاد الثلاثة • يمكن تعيين موضع الجسيم بدلالة الاحداثيا

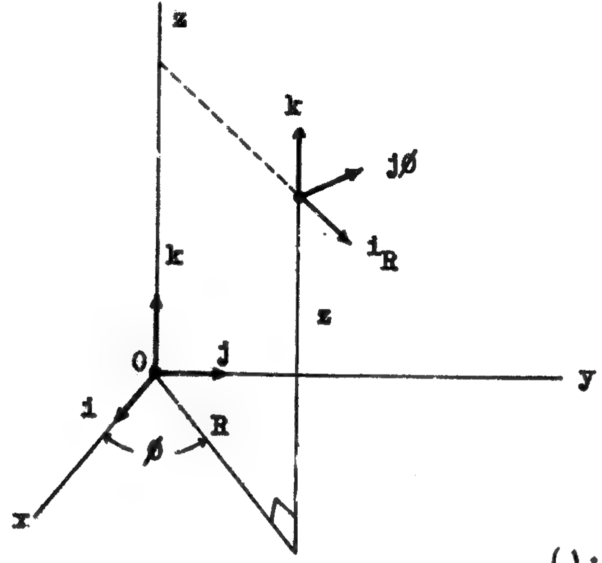
الاسطوانية R, Φ, z عندئذ يكتب موضع المتجـــه على النحو التالى

$$\vec{r} = R\hat{i}_R + z\hat{k} \qquad (٢ - ٢٦)$$

حيث $\hat{i}_R$ يمثل وحدة المتجه القطبية فى المستو xy و $\hat{k}$ وحدة المتجه باتجـــــاه المحور z يلزمنا وحدة متجهة ثالثة $\hat{j}_\phi$ بحيث تكون المتجهات الثـــــلاث $\hat{i}_R \; \hat{j}_\phi \; \hat{k}$ ثلاثى اليد اليمنى كما هو موضح فى الشكل (٢ ـ ١٠) ٠

يمكن ايجاد متجهات السرعة والتعجيل كالسابق بالتفاضل ٠ وهذا يتطلب مرة ثانيـــة تفاضل الوحدات المتجهه ٠ وباستخدام طريقة مماثلة لتلك التى استخدمت فى حالة المستوى نجد ان

$$\frac{d\hat{j}_\phi}{dt} = -\hat{i}_R\,\dot{\phi} \quad , \quad \frac{d\hat{i}_R}{dt} = \hat{j}_\phi\,\dot{\phi}$$



الشكل (٢ ـ ١٠)
الوحدات المتجهه للاحداثيات
الاسطوانيـــة

ولما كانت الوحدة المتجهة $\hat{k}$ لا تغير اتجاهها ، فمشتقتها بالنسبة للزمن تساوى صفرا ومن هذه الحقائق ، يمكن ايجاد متجهات السرعة والتعجيل بسهولة من المعادلات التالية

$$\vec{v} = \dot{R}\hat{i}_R + R\dot{\phi}\,\hat{j}_\phi + \dot{z}\hat{k} \qquad (٢ - ٢٧)$$

$$\vec{a} = (\ddot{R} - R\dot{\phi}^2)\hat{i}_R + (2\dot{R}\dot{\phi} + R\ddot{\phi})\hat{j}_\phi + \ddot{z}\hat{k} \qquad (٢ - ٢٨)$$

هذه تعطى قيم v و a بدلالة مركباتها فى الثلاثى الدائر $\hat{i}_R\ \hat{j}_\phi\ \hat{k}$

طريقة اخرى لايجاد مشتقات الوحدات هى بتفاضل المعادلات التالية التى تمثل العلاقات بين وحدات الثلاثى الثابت ijk والثلاثى الدائر —

$$\hat{i}_R = \hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi$$

$$\hat{j}_\phi = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$

$$\hat{k} = \hat{k}$$

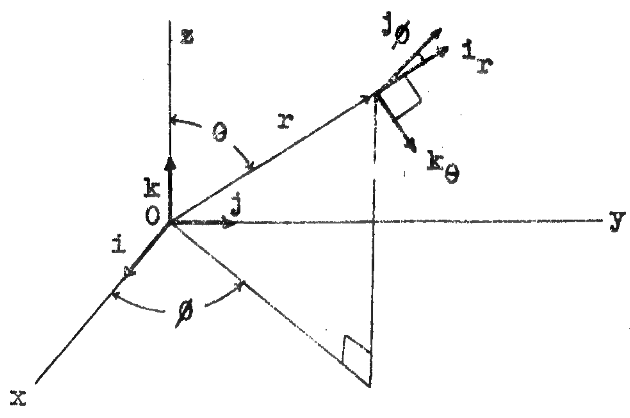
وقد تركت الخطوات كتمرين

الاحداثيات الكروية Spherical Coordinates

عند استخدام الاحداثيات الكروية r , ϕ , θ لوصف موضع جسيم يكتب متجه الموضع كحاصل لضرب المسافة القطبية r والوحدة المتجهه القطبية $\hat{i}_r$ كما هى الحال فى الاحداثيات القطبية المستوية . اذن

$$\vec{r} = r\hat{i}_r \qquad (٢ - ٣٠)$$

فاتجاه $\hat{i}_r$ يعين الان بالزاويتين ϕ و θ لندخل وحدتين متجهتين اخريين $\hat{j}_\phi$ ، $\hat{k}_\theta$ كما هو مبين في الشكل (٢ ـ ١١) • فالمتجهات الثلاث $\hat{k}_\theta$ $\hat{j}_\phi$ $\hat{i}_r$ تكوّن ثلاثي اليد اليسرى كما هو مبين في الشكل [1]



الشكل (٢ ـ ١١) الوحدات المتجهه للاحداثيات الكروية

والسرعة هي ـ

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{i}_r + r\frac{d\hat{i}_r}{dt} \qquad (٢ ـ ٣١)$$

مشكلتنا التالية هي كيفية تمثيل المشتقة $d\hat{i}_r/dt$ بدلالة الوحدات المتجهه في الثلاثي الدائر •

---

(١) ان اختيار ثلاثي اليد اليسرى للاحداثيات الكروية الى حد ما ملائم بحيث سيكون لوحدات متجهات السمت نفس الرمز ، اى $\hat{j}_\phi$ في كل من الاحداثيات الاسطوانية والكروية • ويعين ثلاثي اليد اليمنى في الاحداثيات الكروية بسهولة ويكون ذلك بعكس ترتيب متجهات الزوايا اى ـ

$$\hat{i}_r \; \hat{k}_\theta \; \hat{j}_\phi$$

بالرجوع الى الشكل نرى ان العلاقات التالية تصح بين الثلاثي $\hat{i}_r\ \hat{j}_\phi\ \hat{k}_\theta$ والثلاثي $\hat{i}_R\ \hat{j}_\phi\ \hat{k}$

$$\hat{i}_r = \hat{i}_R \sin\theta + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{j}_\phi = \hat{j}_\phi \qquad (٢ ـ ٣٢)$$

$$\hat{k}_\theta = \hat{i}_R \cos\theta - \hat{k}\sin\theta$$

اذن من المعادلات (٢ ـ ٢٩) يمكننا ان نجد بسهولة

$$\hat{i}_r = \hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{j}_\phi = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi \qquad (٢ ـ ٣٣)$$

$$\hat{k}_\theta = \hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta$$

والتي تمثل الوحدات المتجهة للثلاثي الدائر بدلالة الثلاثي الثابت $\hat{i}\hat{j}\hat{k}$. لنجد مشتقة المعادلة الاولى بالنسبة للزمن . فالنتيجة تكون

$$\frac{d\hat{i}_r}{dt} = \hat{i}(\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - \dot{\phi}\sin\theta\sin\phi)$$

$$+ \hat{j}(\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\phi) - \hat{k}\dot{\theta}\sin\theta$$

ثم . باستخدام علاقات الوحدات المتجهه $\hat{k}_\theta$ ، $\hat{j}_\phi$ في المعادلة (٢ ـ ٣٣)

نجد ان المعادلة السابقة تختصر الى

$$\frac{d\hat{i}_r}{dt} = \dot{\phi}\,\hat{j}_\phi\sin\theta + \dot{\theta}\,\hat{k}_\theta \qquad (٢ ـ ٣٤)$$

ويمكن ايجاد المشتقتين الاخرتين بالاسلوب نفسه والنتائج تكون

$$\frac{d\hat{j}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\,\hat{i}_r\sin\theta - \dot{\phi}\,\hat{k}_\theta\cos\theta \qquad (٢ ـ ٣٥)$$

$$\frac{d\hat{k}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\hat{i}_r + \dot{\phi}\hat{j}_\phi\cos\theta \qquad (٢ ـ ٣٦)$$

وقد تركت الخطوات كتمرين للطالب . نعود الان الى مسألة ايجاد $\vec{v}$ ، اذا عوضنا العلاقة الجبرية للمشتقة $d\hat{i}_r/dt$ من المعادلة (٢ ـ ٣٤) في المعادلة (٢ ـ ٣١) . فالنتيجة النهائية تكون

$$\vec{v} = \hat{i}_r\dot{r} + \hat{j}_\phi r\dot{\phi}\sin\theta + \hat{k}_\theta r\dot{\theta} \qquad (٢ـ٣٧)$$

والتي تعطي متجه السرعة بدلالة مركباته في الثلاثي الدوار $\hat{i}_r\hat{j}_\phi\hat{k}_\theta$

ولايجاد التعجيل نفاضل العلاقة المذكورة اعلاه بالنسبة للزمن فنحصل على ـ

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \hat{i}_r\ddot{r} + \dot{r}\frac{d\hat{i}_r}{dt} + \hat{j}_\phi\frac{d(r\dot{\phi}\sin\theta)}{dt} + r\dot{\phi}\sin\theta\frac{d\hat{j}_\phi}{dt} + \hat{k}_\theta\frac{d(r\dot{\theta})}{dt} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{k}_\theta}{dt}$$

عند استخدام العلاقات السابقة لمشتقات الوحدات المتجهة نجد بسهولة ان العلاقة السابقة للتعجيل تصبح كالاتي

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta - r\dot{\theta}^2)\hat{i}_r + (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\hat{j}_\phi + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{k}_\theta \qquad (٢ـ٣٨)$$

والتي تعطي متجه التعجيل بدلالة مركباته في الثلاثي ـ $\hat{i}_r\hat{j}_\phi\hat{k}_\theta$

تمار يـــــــــن

٢ ـ ١ المعادلات التالية تمثل متجه موضع جسيم متحرك · جد السرعة ، الانطلاق ، والتعجيل كدوال للزمن فى كل حالة وارسم كذلك منحنى لمسار الحركـــــة ؟

(a) $\vec{r} = \hat{i}ct - \hat{j}\frac{g}{2}t^2$

(b) $\vec{r} = \hat{i}ct + \hat{j}A \sin \omega t$

(c) $\vec{r} = \hat{i}A \sin \omega t + \hat{j}B \cos \omega t$

(d) $\vec{r} = \hat{i}ct + \hat{j}b \cos\omega t + \hat{k}b \sin \omega t$

٢ ـ ٢ تمثل العلاقة التالية حركة جسيم

$$\vec{r} = \hat{i} \cos \omega t + 2\hat{j} \sin \omega t$$

جد الزاوية بين متجه التعجيل ومتجه السرعة فى الزمن $t = \pi/4\omega$

٢ ـ ٣ تمثل العلاقتان التاليتان موضع جسيمين يتحركان على مسار دائرى مشترك

$$\vec{r}_1 = \hat{i}b \sin \omega t + \hat{j}b \cos \omega t$$
$$\vec{r}_2 = \hat{i}b \cos \omega t - \hat{j}b \sin \omega t$$

جد السرعة النسبية ، مقدار السرعة النسبية ، ومعدل التغيير الزمنى للمسافة بيـــــن الجسيمين ، الجميع كدااوال للزمن t .

٢ ـ ٤ يتغير تعجيل جسيم مع الزمن وفقا للمعادلة $\vec{a} = \hat{i}At + \hat{j}Bt^2 + \hat{k}nt^3$

اذا كانت السرعة تساوى $\vec{v}_0$ والموضع $\vec{r}_0$ فى الزمن $t = 0$ ، جد متجه الموضـع كدالة للزمـــــن ·

٢ ـ ٥ يتحرك جسيم بانطلاق ثابت ولكنه يغير اتجاهه باستمرار · اثبت ان متجه التعجيـــل يكون دائما عموديا على متجه السرعة · حل التمرين بالطريقتين التاليتين ـ

آ ـ باستخدام علاقات المركبات المماسة والعمودية للسرعة والتعجيل ·

ب ـ اثبت ان $\vec{v}\cdot\vec{a} = 0$ اذا اعطيت $\vec{v}$, $\vec{a}$ بالاحداثيات الديكارتيـــة ·

٢ ـ ٦ اثبت ان مقدار المركبة المماسة للتعجيل هي

$$a_\tau = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

والمركبة العمودية

$$a_n = (a^2 - a_\tau^2)^{\frac{1}{2}}$$

٢ ـ ٧ استخدم النتيجة السابقة لايجاد المركبات العمودية والمماسة للتعجيل كـــدوال للزمن في التمرين (٢ ـ ١) ·

٢ ـ ٨ يتحرك جسيم على دائرة نصف قطرها ثابت b · فاذا كان انطلاق الجســيم يتغير مع الزمن وفقا للمعادلة $v=At^2$ فاية قيمة او قيم للزمن t يصنع فيهـــا متجه التعجيل زاوية ٤٥° مع متجه السرعـــة ·

٢ ـ ٩ اذا علمت ان الاحداثيات القطبية لجسيم هي

(a) $r = be^{kt}$ $\quad\theta = \omega t$

(b) $r = A\cos\omega t$ $\quad\theta = c\omega t$

جد متجهات السرعة والتعجيل كدوال للزمن · كذلك جد الانطلاق ومقدار التعجيـــــل في الزمن $t = 0$.

٢ ـ ١٠ يتحرك جسيم على مسار لولبي ، فاذا كانت احداثياته الاسطوانية تتغير مـــع الزمن وفقا للعلاقات التاليـــة

$$R = A\,,\ \phi = Bt^2\,,\ z = Ct^2$$

حيث A, B, C ثوابت · جد متجهات السرعة والتعجيل كدوال للزمن t

جد كذلك الزاوية بين متجهى السرعة والتعجيل فى الزمن $t = 1$.

٢ ــ ١١ اذا اعطيت حركة جسيم بالاحداثيات الكروية كالاتى ــ

$$r = b \qquad \phi = \omega t \qquad \theta = \frac{\pi}{2}\left(1 + \tfrac{1}{4}\cos\omega t\right)$$

جد الانطلاق ومقدار التعجيل كدوال للزمن t • وما هو شكل المسار الذى تمثلــــه المعادلات السابقة •

٢ ــ ١٢ برهن على ان

$$\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = A\frac{dA}{dt}$$

(ملاحظة ــ جد مشتقة العلاقة $\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$ بالنسبة للزمـــن t) •

٢ ــ ١٣ اذا كان

$$\vec{A} = 2t^2\,\hat{i} + 3t\hat{j} - 2\hat{k}$$

و

$$\vec{B} = \hat{i}\cos\omega t + \hat{j}\sin\omega t + t^2\hat{k}$$

جـد

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) \;, \quad \frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B})$$

كـــدوال للزمـــن t .

٢ ــ ١٤ اثبت ان

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{a})) = \vec{r}\cdot(\vec{v}\times\dot{\vec{a}})$$

حيث

$$\dot{\vec{a}} = d\vec{a}/dt, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad , \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

٢ ــ ١٥ تتدحرج عجلة على سطح الارض بتعجيل امامى ثابت a_o جد التعجيل فى اية نقطة على حافة العجلة بالنسبة الى

آ ـ مركز العجلة ٠ و (ب) الارض ٠ اية نقطة على حافة العجلة لهااكبر تعجيل بالنسبة للارض ٠

٢ ـ ١٦ اثبت ان $d\hat{i}_R/dt = \hat{j}_\phi \dot{\phi}$, $d\hat{j}_\phi/dt = -\hat{i}_R \dot{\phi}$ بتفاضل المعادلات (٢ـ٢٩)

٢ ـ ١٧ اكمل اشتقاق المعادلات (٢ ـ ٣٥) و (٢ ـ ٣٦) ٠

٢ ـ ١٨ املأ الخطوات اللازمة لايجاد التعجيل في الاحداثيات الكروية ٠ معادلة (٢ ـ ٣٨) ٠

٢ ـ ١٩ وضعت عجلة نصف قطرها b في جهاز ودورت على النحو التالي ـ حول محورها بسرعة زاوية ثابتة ω_1 ٠ والمحور يدور بدوره بسرعة زاوية ثابتة ω_2 حول محور عمودي بطريقة يبقى معها محور العجلة في مستوى افقي ومركز العجلة ساكنا ٠ استخدم الاحداثيات الكروية لايجاد التعجيل لاية نقطة على حافة العجلة وبصورة خاصة التعجيل في اعلى نقطة من العجلة ٠

٢ ـ ٢٠ افرض ان الوحدة المتجهه المماسة τ يمكن تمثيلها بالعلاقة التالية

$$\tau = \frac{\vec{v}}{v}$$

جد علاقة للوحدة المتجهه العمودية $\vec{n}$ بدلالة $\dot{v}, v, \vec{v}, a, \vec{a}$

كما في تمرين (٢ ـ ٦) ٠

الفصـــــل الثالث

داينامك الجســيم • الحركة على خط مستقيم

Dynamics of a Particle-Rectilinear Motion

ان الداينامك ـ كما بينا في المقدمة ـ هو احد فروع الميكانيك الذي يستخدم قوانين الفيزيـاء التي تتحكم بالحركـة الفعليـة للاجسـام المادية• واحـد اغـراض الداينامك الاسـاسـية التنبـؤ بكل الطرق الممكنـة التي تتحرك فيها منظومـة ماديـة • و نوع الحركـة التي سـتحدث في ظروف معينـة • ان دراسـتنا للداينامك في هذا الموضـع سـوف تعتمـد على قوانين الحركـة كما صاغها نيوتن لاول مـرة • و سـندرس في فصل متأخر طرقا اخرى متقدمـة اكثر لتوضيـح قوانـين الحركـــة و ذلك باستخدام معادلات لاكرانـج و هملتن •

و هي ليسـت على كل حال نظريات مختلفـة و انما يمكن اشتقاقها من قوانين نيوتن

٣ ـ ١) قوانين نيوتن للحركـة Newton's Laws of Motion

مما لا شـك فيه ان القارئ ملم حاليا بقوانين نيوتن للحركة المألوفة و هي كالاتي :

١ـ كل جسـم يسـتمر في حالة السـكون او الحركة المنتظمـة في خط مسـتقيم ما لـم ترغمـه قوة على تغيير تلك الحالـة •

٢ـ يتناسـب تغيير الحركـة مع القوة المسـلطة و تحدث باتجاه تأثير القـوة •

٣ـ هنـاك لكل فعـل دائمـا رد فعل مسـاو له في المقدار و معاكس في الاتجـاه او الافعال المتبادلة لجسـمين تكون دائما متسـاوية و متعاكسـة بالاتجاه ••

دعنـا الان نختبر هـذه القـوانين بشـيء من التفصيـل

٣ـ٢) قانون نيوتن الاول • المحاور المرجعيـة القصورية

Newton's First Law. Inertial Reference System.

يصف القانون الاول خاصـة عامـة تشـترك فيها جميـع المواد • اى الاستمرارية

او القصور الذاتي Inertia وينص القانون على ان الجسم المتحرك يسير على خط مستقيم بانطلاق ثابت ما لم يمنعه تأثير ما يسمى بالقوة يحول دون استمراره على ذلك . سواء تحرك الجسيم على خط مستقيم بانطلاق ثابت ام لا فأن ذلك لا يعتمد فقط على التأثيرات الخارجية (القوى) وانما يعتمد كذلك على محاور مرجعية خاصة تستخدم لوصف الحركة . في الحقيقة ان قانون نيوتن الاول ما هو الا تعريف لنوع معين من محاور مرجعية تسمى بالمحاور المرجعية المستمرة او النيوتونية Newtonian or Inertial-Reference system ومحاور كهذه يصح فيها قانون نيوتن الاول .

هنا يكون طبيعيا ان يظهر السؤال التالي :
كيف يمكن معرفة ما اذا كانت محاور معينة تكون محاورا نيوتونية اولا ؟ ان الجواب على سؤال كهذا ليس بسيطا . فلاجل تخليص الجسم من تأثير جميع القوى فإن من الضروري عزله تماما . وهذا غير ممكن بطبيعة الحال لحتمية وجود على الاقل بعض قوى الجاذبية التي تؤثر على الجسم ما لم يبعد الى مسافة لانهائية من جميع المواد الاخرى .

اما في الاغراض العملية التي لا تحتاج الى دقة متناهية وهي كثيرة . فأن المحاور المثبتة على الارض تكون اقرب الى المحاور النيوتونية لذلك — وعلى سبيل المثال — تبدو كرة البليارد وكأنها تسير بخط مستقيم وبانطلاق ثابت طالما لا تصطدم بكرة اخرى او تضرب الحافة ولكن اذا قيست حركة الكرة بدقة متناهية فسوف نكتشف ان مسارها مقوس قليلا . وهذا ينشأ بسبب دوران الارض . ولذلك المحاور المثبتة على الارض ليست في الواقع محاور نيوتونية . والافضل منها هي التي تستخدم مركز الارض ومركز الشمس وكوكب بعيد كنقاط مرجعية . ولكن حتى هذه المحاور ليست نيوتونية تماما بسبب حركة الارض حول الشمس . ان التقريب الافضل هو — على سبيل المثال — اعتبار مركز الشمس

ونجمتين بعيدتين كنقاط مرجعية • وقد اتفق بصورة عامة ان تكون المحاور النيوتونية الاخيرة في مفهوم الميكانيك النيوتوني هي التي تعتمد على معدل خلفية جميع المادة الموجودة في الكون •

٣ـ٣) الكتلة والقوة • قانوني نيوتن الثاني والثالث

Mass and Force. Newton's Second and Third Laws

من الحقائق المالوفة لدينا جميعا اننا عند رفع حجر كبير لا نعاني صعوبة كصعوبة تحريكه (او ايقافه) بينما لا نجد صعوبة بهذا المستوى في التعامل مع قطعة خشبية صغيرة فنقول ان القصور الذاتي للحجر اكبر من الخشب والقياس الكمي للقصور الذاتي يسمى بالكتلة • لنفرض ان عندنا جسمين B,A فكيف نحسب مقياس القصور الذاتي لاحدهما بالنسبة الى الاخر ؟ هناك تجارب عديدة يمكن استنباطها للاجابة على هذا السؤال منها محاولة جعل الجسيمين يوءثر احدهما على الاخر كربطهما بلولب حلزوني مثلا ، عندئذ نجد من التجارب الدقيقة ان تعجيلي الجسيمين يكونان دائما متعاكسين بالاتجاه والنسبة بينهما ثابتة (على فرض ان التعجيل معطي في المحاور النيوتونية واخذ بنظر الاعتبار التأثير المتبادل للجسيمين A و B فقط) ويمكننا التعبير عن هذه الحقيقة المهمة جدا والاساسية بالمعادلة التالية :

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = -\frac{d\vec{v}_B}{dt}\mu_{BA} \qquad \vec{a}_A = -\vec{a}_B\,\mu_{BA} \qquad (١ ــ ٣)$$

الثابت μ_{BA} يمثل في الحقيقة معيار القصور الذاتي النسبي للجسم B بالنسبة الى A من المعادلة (٣ــ١) ينتج ان $\mu_{BA}=1/\mu_{AB}$ اذن قد نعبر عن μ_{BA} بالنسبة $\mu_{BA}=\frac{m_B}{m_A}$ حيث استعمل جسم ما كمعيار لوحدة القصور الذاتي • الان النسبة m_B / m_A يجب ان تكون مستقلة عن اختيار الوحدة • هذه الحالة ستكون نفسها اذا كان لاى جسم ثالث C

$$\frac{\mu_{BC}}{\mu_{AC}}=\mu_{BA}$$

وهذه فعلا وجدت صحيحة. نسمي الكمية m بالكتلة •

وبعبارة ادق يجب ان نسمي m كتلة القصور الذاتي لان تعريفها اعتمد على خواص القصور الذاتي • في الممارسة الفعلية تعين عادة نسب الكتل بالوزن • فالوزن او قوة جذب الارض تتناسب مع ما قد يسمى بالكتلة التثاقلية للجسم • على اية حال • ان جميع التجارب المعروفة لحد الان ـ تشير الى ان كُلًّا من كتلة القصور الذاتي و الكتلة التثاقلية تتناسب كل منهما بدقة مع الاخرى • اذن لا نحتاج لاغراضنا ان نفرق بين هذين النوعين من الكتلة •

يمكن الان كتابة الحقيقة الاساسية التي عبرت عنها المعادلة (٣ـ١) على الشكل التالي :ـ

$$m_A \frac{d\vec{v_A}}{dt} = - m_B \frac{d\vec{v_B}}{dt} \qquad (٣ـ٢)$$

ان حاصل ضرب الكتلة في التعجيل في المعادلة السابقة يشمل " تغيير الحركة " لقانون نيوتن الثاني •و وفقا لهذا القانون فان هذا التغيير يتناسب مع القوة • وبعبارة اخرى يمكننا كتابة القانون الثاني على النحو التالي

$$\vec{F} = km \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (٣ـ٣)$$

حيث $\vec{F}$ تمثل القوة • و k ثابت التناسب اعتياديا نضع k=1 ونكتب[1]

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (٣ـ٤)$$

---

(1) ان وحدة القوة في نظام mks والتي عرفت في المعادلة (٣ـ٤) تسمى بالنيوتن لذلك قوة نيوتن واحد تعجل جسم كتلته ١ كغم بمقدار ١ متر/ثانية^2• و وحدة القوة في نظام cgs (١ غم × ١ سم / ثا^2) هي الداين •

المعادلة المذكورة اعلاه تكافئ:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \qquad (٣-٥)$$

اذا كانت الكتلة ثابتة . وسنرى في المستقبل ان النظرية النسبية تتكهن بان كتلة الجسم المتحرك غير ثابتة وانما تكون دالة لانطلاقه . وبذلك تكون المعادلتان (٣-٤) و (٣-٥) غير متكافئتين تماما وعلى اية حال . فان الانطلاقات عندما تكون صغيرة قياسا الى انطلاق الضوء (٣ × ١٠^٨ متر / ثا) يكون تغيير الكتلة مهملا .

ووفقا للمعادلة (٣-٤) يمكننا الان تفسير الحقيقة الاساسية التي بينتها المعادلة (٣-٢) كتعبير عن حالة الجسمين الذين يؤثر احدهما على الاخر بقوتين متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه . اي

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

وهذا هو مضمون قانون نيوتن الثالث . القوى تأثير متبادل وتحدث بمقادير متساوية بين اي جسمين يؤثر كل منهما على حركة الاخر ..

فائدة واحدة كبيرة لمفهوم القوة هي تمكننا من حصر انتباهنا على جسم منفرد . والاهمية الفيزيائية لفكرة القوة هي امكانية ايجاد دالة بسيطة نسبيا للاحداثيات في ظروف معينة بصورة اعتيادية والتي تسمى بدالة القوة . وعندما توضع هذه الدالة مساوية لحاصل ضرب الكتلة في التعجيل فانها تصف حركة الجسم بصورة صحيحة .

٣-٤) الزخم الخطي Linear Momentum

ان حاصل ضرب الكتلة في السرعة يسمى بالزخم الخطي . ويمثل بالرمز p .

اذن

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad (٣-٦)$$

فالنص الرياضي لقانون نيوتن . المعادلة (٣-٥) عندئذ يمكن كتابتها على النحو التالي :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (٣-٧)$$

بعبارة اخرى ، القوة تساوى التغير الزمني للزخم الخطي .

و يمكن التعبير بصورة افضل عن القانون الثالث ، قانون الفعل ورد الفعل ، بدلالة الزخم الخطي . اذن لجسمين A و B بينهما تأثير متبادل نحصل على

$$\frac{d\vec{p}_A}{dt} = -\frac{d\vec{p}_B}{dt}$$

او

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_A + \vec{p}_B) = 0$$

ووفقا لذلك

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \text{ثابت}$$

اذن يتضمن القانون الثالث بقاء الزخم الخطي الكلي لجسمين بينهما تأثير متبادل ثابتا في جميع الاحوال

ان ثبوت مجموع الزخم الخطي لجسمين بينهما تأثير متبادل هو حالة خاصة لقانون عام سنشرحه بالتفصيل فيما بعد ، اى ان الزخم الخطي الكلي لاى مجموعة معزولة يبقى ثابتا بمرور الزمن . و يسمى هذا النص الاساسي بقانون حفظ الزخم الخطي و هو احد القوانين الاساسية في الفيزياء . و قد فرضت صحته حتى في الحالات التي يفشل فيها تطبيق قوانين نيوتن نفسها .

٣ـ٥) حركة الجسيم Motion of a Particle

ان معادلة حركة الجسيم الاساسية تعطي بالعلاقة الرياضية لقانون نيوتن الثاني ، اى المعادلة (٣ ـ ٤) و عندما يكون الجسيم تحت تأثير اكثر من قوة واحدة ، فيمكن اعتبار جمع هذه القوى بطريقة جبر المتجهات من الحقائق التجريبية .. اى

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{a} \qquad (٣ـ٨)$$

الممثلة بالاحداثيات الديكارتيه والمعادلة المذكورة اعلاه تكافئ المعادلات العددية التالية

$$F_x = \sum F_{ix} = m\ddot{x}$$
$$F_y = \sum F_{iy} = m\ddot{y} \qquad (٣ - ٩)$$
$$F_z = \sum F_{iz} = m\ddot{z}$$

تستخدم غالبا محاور اخرى غير المحاور الديكارتيه والتي سوف نبحثها فيما بعد. اذا كان تعجيل جسيم ما معروفا فان معادلة الحركة (المعادلة ٣ ـ ٨) تعطي القوة التي تؤثر على الجسيم • ولكن المسائل الاعتيادية لديناميك جسيم هي تلك التي تكون فيها القوى دوال معينة معروفة للاحداثيات بضمنها الزمن • والمهم هو ايجاد موضع الجسيم كدالة للزمن • ان هذا يتطلب حل مجموعة من المعادلات التفاضلية • وفي بعض المسائل يظهر من المستحيل ايجاد حلول للمعادلات التفاضلية للحركة بدلالة الدوال التحليلية المعروفة • وفي هذه الحالة يجب استعمال بعض طرق التقريب • وفي تطبيقات عملية كثيرة كحركة القذنيات ballistics والتوابع وغيرها تكون المعادلات التفاضلية من التعقيد بحيث يصبح من الضروري الاستعانة بالتكامل العددي • وغالبا يحسب بواسطة الحاسبات الالكترونية عالية السرعة للتنبوء بالحركة •

٣ ـ ٦) الحركة على خط مستقيم Rectilinear Motion

اذا بقي جسيم متحرك على خط مستقيم ، سميت الحركة بالحركة على خط مستقيم وفي هذه الحالة نحتاج الى مركبة واحدة فقط من المعادلة (٣ ـ ٩) مثل مركبة ـ x ، لاننا يمكننا ان نختار المحور ـ x كخط للحركة دون ان نخسر التعميم • عندئذ تصبح الحروف التي تكتب في اسفل الرموز لا ضرورة لها وتكتب المعادلة العامة للحركة على النحو التالي :ـ

$$F(x, \dot{x}, t) = m\ddot{x}$$

ولنعتبر الان بعض الحالات الخاصة التي يمكن فيها تكامل المعادلة بالطرق الاولية

القوة ثابتة Constant Force

ان ابسط الحالات هي التي تكون فيها القوة ثابتة • وفي هذه الحالة يكون التعجيل ثابتا ••

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\overline{F}}{m} = \text{constant} = a$$

ويمكن ايجاد حل هذه المعادلة بسهولة بالتكامل المباشر

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{t} a\, dt$$

$$v = at + v_0 = dx/dt \qquad (٣_١١)$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} (at + v_0)dt$$

$$x = \tfrac{1}{2}\, at^2 + v_0 t + x_0 \qquad (٣_١٢)$$

حيث v_0 تمثل السرعة الابتدائية x_0 الموضع الابتدائي • وبتعويض الزمن t بين المعادلة (٣ــ١١) و (٣ــ١٢) نحصل على

$$2a\,(x - x_0) = v^2 - v_0^2 \qquad (٣_١٣)$$

سنذكر الطالب بان المعادلات المذكورة اعلاه هي معادلات الحركة المألوفة ذات التعجيل المنتظم •

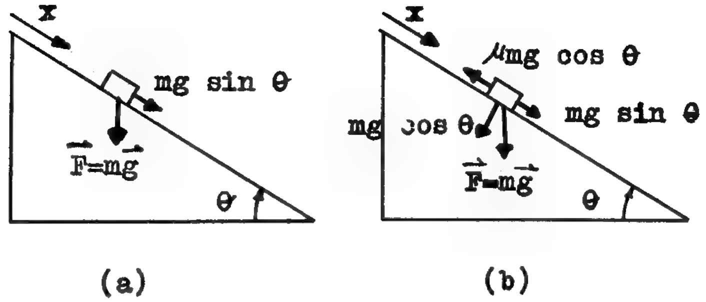
هناك تطبيقات اساسية عديدة فمثلا في حالة سقوط الجسم الحر بالقرب من سطح الكرة الارضية اهمال مقاومة الهواء يكون التعجيل ثابتا تقريبا • وتمثل تعجيل الجسم الحر السقوط بالرمز $\overline{g}$ (قيمته العددية المقاسة $(g = 9.8\ m/sec^2$

ووفقا لـذلك تكـون قـوة جاذبيـة الارض متجهـة نحـو الاسـفل (الثقـــل) وتسـاوى $\vec{mg}$ وقوة الجاذبيـة متواجـدة دائمـا بصرف النظر عن حركـة الجســـم وهي مستقلة عن اية قـوى اخـرى والتي قد تؤثر على الجسـم • وسنسـميها من الان فصاعـدا $\vec{mg}$.

مثـــال

افرض ان جسيماً ينزلـق اسـفل سـطح املس يميل بزاويـة θ عن الافـق كما هو مبين في الشـكل (٣ـ١أ) وقد اخترنا الاتجـاه الموجب لمحـور ـ x نحـو اسـفل السـطح • كما هو مبين • ولذلك تكون مركبـة قوة الجاذبية باتجـاه x تسـاوى $mg \sin \theta$ ولما كانت هذه الكميـة ثابتـة لذلك تسـتخدم المعـادلات (٣ـ١١) و (٣ـ١٢) و (٣ـ١٣) لهذه الحركـة حيث

$$a = \frac{\vec{F}}{m} = g \sin \theta$$



الشـكل (٣ـ١) جسـيم ينزلق اسفل سطح مائل (آ) سـطح املس (ب) سـطح خشـن

لو فرضنـا سـطحاً خشـن بدلا من السـطح الاملس • اى ان السـطح يؤثر بقـوة احتكاكيـة على الجسـيم • عندئذ تكـون محصلـة القوى بالاتجاه ـ x مســـاوية

الى $mg \sin \theta - f$ ولكن من المعروف ان مقدار القوة الاحتكاكية يتناسب مع مقدار القوة العمودية N للتماس الانزلاقي اى $f = \mu N$ حيث ثابت التناسب μ يسمى بمعامل الاحتكاك الانزلاقي • في هذا المثال القوة العمودية N تساوى $mg \cos \theta$ كما هو واضح من الشكل •اى

$$f = \mu mg \cos \theta$$

وهكذا تكون محصلة القوة باتجاه x مساوية الى

$$mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta$$

مرة اخرى القوة ثابتة ولذلك يصح استخدام المعادلات (٣ـ١١ ،(٣ـ ١٢) و (٣ـ١٣) حيث

$$a = \frac{F}{m} = g(\sin \theta - \mu \cos \theta) \qquad (٣ـ١٤)$$

وسيزداد انطلاق الجسيم اذا كان المقدار الجبرى داخل الاقواس موجبا •اى اذا كانت $\theta > \tan^{-1} \mu$ وتمثل الزاوية $\tan^{-1} \mu$ عادة بالرمز ϵ • وتسمى بزاوية الاحتكاك • اذا كانت $\theta = \epsilon$ عندئذ $a=0$ اى ان الجسيم ينزلق اسفل السطح بانطلاق ثابت • اما اذا كانت $\theta < \epsilon$ فعندئذ تكون a سالبة وبذلك يصل الجسيم اخيرا الى حالة السكون • وعلينا ملاحظة ان اتجاه قوة الاحتكاك ينعكس • عندما تكون الحركة الى اعلى السطح المائل • اى بالاتجاه الموجب لمحور ـ x والتعجيل (بالحقيقة تباطوء) عندئذ يكون

$$a = g(\sin \theta + \mu \cos \theta)$$

٣ـ٧) القوة كدالة للموضع فقط،مفهوما الطاقة الحركية والكامنة

The Force as a Function of Position Only.

The Concepts of Kinetic and Potential Energy

في امثلة عديدة يعتمد تأثير القوة على جسيم على موضعه فقط بالنسبة الى اجسام اخرى • فمثلا تنطبق هذه الحالة على قوى الجذب الارضي والالكتروستاتيك وتنطبق كذلك على قوى الكبس او الشد المرن •والمعادلة التفاضلية للحركة على

خط مستقيم لهذه الحالة هي :

$$\vec{F}(x) = m\ddot{x} \qquad (٣-١٥)$$

اعتيادياً يمكن حل هذا النوع من المعادلات التفاضلية بواحدة من طرق كثيرة . ومن الطرق المفيدة والمهمة لحلها هي كتابة التعجيل على النحو التالي :

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\frac{d\dot{x}}{dx} = v\,\frac{dv}{dx} \qquad (٣-١٦)$$

وهكذا يمكن كتابة المعادلة التفاضلية للحركة كالاتي :

$$F(x) = mv\,\frac{dv}{dx} = \frac{m}{2}\,\frac{d(v^2)}{dx} = \frac{dT}{dx} \qquad (٣-١٧)$$

حيث الكمية $T=\frac{1}{2}mv^2$ تسمى بالطاقة الحركية للجسم ويمكننا الان وضع المعادلة (٣-١٧) بصيغة التكامل اي :

$$\int F(x)\,dx = \int dT \qquad (٣-١٨)$$

الان يمثل التكامل $\int F(x)dx$ الشغل المسلط على الجسم من تأثير القوة (x) F ولنعرف دالة مثل (x) V على النحو التالي :

$$-\frac{dV}{dx} = F(x) \qquad (٣-١٩)$$

والدالة (x) V تسمى بالطاقة الكامنة . وعرفت فقط ضمن ثابت (اعتباطي) مضاف وبذلك يكون تكامل الشغل بدلالة (x) V على النحو التالي :

$$\int F(x)dx = -\int \frac{dV}{dx}\,dx = -V(x) + \text{constant}$$

ومن المعادلة (٣-١٨) يمكن كتابة

$$T + V = \frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \text{constant} = E \qquad (٣-٢٠)$$

وتسمى E بالطاقة الكلية • بعبارة اخرى ـ اذا كانت القوة المؤثرة دالة للموضع فقط للحركة على خط مستقيم ، فان مجموع الطاقة الحركية والكامنة يبقى ثابتا خلال الحركة • وتسمى القوة في هذه الحالة محافظة[٢] Conservative • اما القوى غير المحافظة اى التي لا تتواجد لها دالة كامنة فتكون اعتياديا من نوع التبديد ، مثل الاحتكاك •

يمكن ايجاد حركة الجسيم من حل معادلة الطاقة [المعادلة (٣ـ٢٠)] للانطلاق v

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]} \qquad (٣ـ٢١)$$

والتي يمكن كتابتها بصيغة التكامل على النحو التالي :

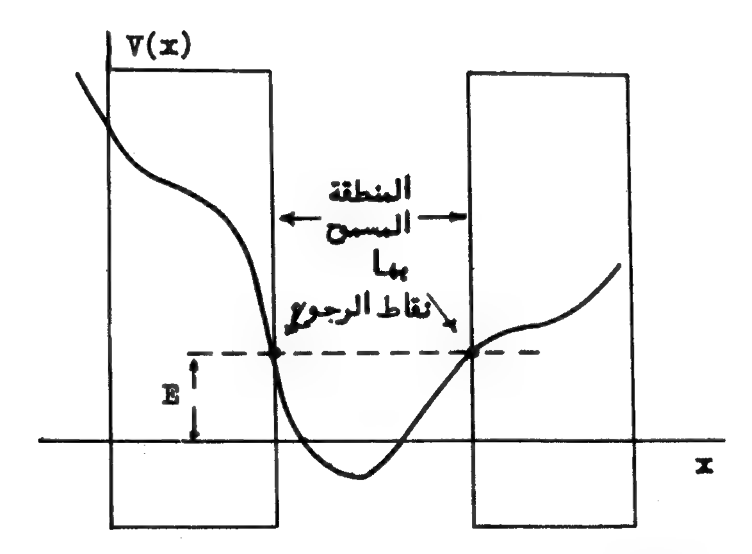
$$\int \frac{\pm\, dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E-V(x)\right]}} = t \qquad (٣ـ٢٢)$$

وهذه تعطي t كدالة للموضع x

من المعادلة (٣ـ٢١) نرى ان الانطلاق يكون حقيقا فقط لقيم x عندما تكون V (x) اقل من الطاقة الكلية E او مساوية لها •• فيزيائيا ، وهذا يعني ان الجسيم محصور في المنطقة او المناطق التي يستوفي فيها الشرط $V(x) \leqslant E$ • اضف الى ذلك يصبح الانطلاق صفرا عندما تكون $V(x)=E$ وهذا يعني ان الجسيم يجب ان يقف ويعكس حركته في تلك النقاط التي تصح فيها المساواة • وتسمى هذه النقاط بنقاط الرجوع Turning points للحركة • وقد وضحت الحقائق المبينة اعلاه في الشكل (٣ـ٢)

---

(٢) سوف تبحث القوى المحافظة في الفصل القادم بالتفصيل •



الشكل ٣ـ٢ • خط بياني دالة الطاقة الكامنـــــة V(x) يبين المنطقة المسموح بها للحركة و نقاط الرجوع لقيمة معلومة للطاقـــة الكليـــة E

مثـــال

ان حركـة الجسـم الحر السـقوط للحالة الـتي تكـون فيهـا القوة ثابتة • المشـروحة اعلاه هي حالة خاصـة للحركة المحافظـة "Conservative" اذا اخترنا اتجاه x موجبا الى الاعلى • فان قوة الجذب الارضي تكون mg- . و دالة الطاقـــة الكامنـة تسـاوي اذن $V = mgx + C$. هنا C ثابت اعتباطي يمكـن وضعـه مسـاويا للصفر للملائمـة • عندئذ تصبـح الطاقـة الكلية مساوية الى

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + mgx$$

افرض ـ على سبيل المثال ـ ان جسـما قد قذف الى الاعلى بانطلاق ابتدائي v_0 وعنـد اختيار $x = 0$ كنقطـة ابتدائية للقذف نحصل على

$$E = \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + mgx$$

لمعادلة الطاقــة ٠ وفي هذه الحالة تكون نقطــة الرجوع عبارة عن اعظــم ارتفـــــاع يصلــه الجســيم والتي يمكن ايجادها بوضع $\dot{x} = 0$ إذن

$$\tfrac{1}{2} mv_0^2 = mgx_{max}$$

او

$$h = x_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

والحركـة ، بدلالــة تكامل معادلــة الطاقــة تكون على النحو التالي :

$$\int_0^x (v_0^2 - 2gx)^{-\frac{1}{2}} dx = t$$

$$\frac{v_0}{g} - \frac{1}{g}(v_0^2 - 2gx)^{\frac{1}{2}} = t$$

على الطالب ان يتحقق من ان هذه العلاقــة تصبــح نفس العلاقة بين x و t المبينة في المعادلة (٣ـ١٢) عند وضــع a مســاويا الى $-g$

٣ـ٨) القوة كدالة للسرعة فقط The Force as a Function of Velocity only

يحدث في اكثر الاحيان ان تكون القوة المؤثرة على جســيم ما دالــة لســـرعته يصــح هذا مثلا في حالة مقاومــة الموائــع التي تؤثر على جســم يتحرك في مائــع في السرع الواطئة لوحظ ان مقاومة المائـــع تتناســب تقريبا مع الســرعة ، بينمــا في الســرع العاليــة يقترب تناســبها اكثر من مربع v ٠ فان لم يكن هنــاك قــوى مؤثرة أخــرى فان من الممكن كتابــة المعادلــة التفاضليــة للحركــة على الكيفية التالية

$$F(v) = m \frac{dv}{dt} \qquad (٣ـ٢٣)$$

وبتكاملها مرة واحــدة نحصل على t كدالة للســرعة v

$$t = \int \frac{m\,dv}{F(v)} = t(v) \qquad (٣ـ٢٤)$$

اذا فرضنا ان بامكاننا حل المعادلة السابقة للسرعة v اى

$$v = v(t)$$

فان تكاملا ثانيا يعطي الموضع x كدالة للزمن t

$$x = \int v(t)\ dt = x(t) \qquad (٣\text{ـ}٢٥)$$

الطريقة الاخرى هي بتعويض $v\frac{dv}{dx}$ بدلاً من $\frac{dv}{dt}$ في المعادلة (٣ ـ٢٣) لنحصل على

$$F(v) = mv\frac{dv}{dx} \qquad (٣\text{ـ}٢٦)$$

وباجراء التكامل نحصل على x بدلالة v .

$$x = \int \frac{mvdv}{F(v)} = x(v) \qquad (٣\text{ـ}٢٧)$$

وعند حل هذه المعادلة للسرعة v كدالة للموضع x نحصل على

$$v = v(x)$$

وعند تكامل الاخيرة نحصل على

$$t = \int \frac{dx}{v(x)} = t(x) \qquad (٣\text{ـ}٢٨)$$

في الحقيقة يجب ان يكون للمعادلات (٣ـ٢٥) و (٣ـ٢٨) نفس العلاقة بين x و t .

مثـــال

افرض ان قالبا قد قذف بسرعة ابتدائية v_o على سطح مستو املس ، وكان متأثرا بمقاومة الهواء التي تتناسب مع v ، اى ان $F(v) = -cv$ حيث c يمثل ثابت التناسب (المحور ـ x باتجاه الحركة) . المعادلة التفاضلية

للحركـة هي :

$$-cv = m\frac{dv}{dt}$$

والتي تعطي عند تكاملهـا

$$t = \int_{v_0}^{v} -\frac{mdv}{cv} = -\frac{m}{c}\ln\left(\frac{v}{v_0}\right)$$

يمكننا حلها بسـهولة للسـرعة v كدالة للزمن t ويكون ذلك بضرب المتساويـة بالكميـة $\frac{c}{m}$ - واخذ الاس exponent) لطرفيها فالنتيجـة تكون

$$v = v_o e^{-ct/m}$$

اى ان السـرعة تتناقص اسـيا مع الزمن • وعند تكاملها للمرة الثانية نحصل على :

$$x = \int_{0}^{t} v_o e^{-ct/m}\, dt = \frac{mv_o}{c}\left(1 - e^{-ct/m}\right)$$

نرى • من المعادلة المذكورة اعلاه • ان القالب لا يتعدى ابدا مسـافة نهائيـة مقدارها mv_o/c

ويمكن كذلك كتابة المعادلة التفاضليـة على النحو التالي :

$$-cv = mv\frac{dv}{dx}$$

كما في المعادلة (٣ــ٢٦) وبحذف العامل المشـترك v من طرفي المتسـاويـة • وتكاملها نحصل على

$$-c\int_{0}^{x} dx = m\int_{v_0}^{v} dv$$

$$-\frac{c}{m}x = v - v_0$$

او

$$v_0 - \frac{c}{m}x = v = \frac{dx}{dt}$$

اى ان سرعة القالب تتغير خطيا مع المسافة • وبتكاملها مرة اخرى نحصل على :

$$t = \int_{0}^{x} \frac{dx}{v_0 - (c/m)x} = \frac{-m}{c} \ln \left(\frac{v_0 - (c/m)x}{v_0} \right)$$

وعند حل هذه المعادلة للموضع x (بضربها بالكمية $-c/m$ واخذ الاس) •
نحصل على نفس العلاقة بين x و t التي حصلنا عليها سابقا •

٣ـ٩) القوة كدالة للزمن فقط •

The Force as a Function of Time Only:

اذا اعتمدت القوة بصورة صريحة على الزمن • فيمكن تكامل معادلة الحركة :

$$F(t) = m \frac{dv}{dt} \qquad (٣ـ٢٩)$$

مباشرة • وذلك

$$\frac{dx}{dt} = \int \frac{F(t)}{m} \, dt = v(t) \qquad (٣ـ٣٠)$$

معطية v كدالة للزمن t • وبتكاملها للمرة الثانية نحصل على x كدالة للزمن t اى

$$x = \int v(t) \, dt = \int \left[\int \frac{F(t')}{m} \, dt' \right] dt \qquad (٣ـ٣١)$$

ويجب ملاحظة الحالة التي تكون فيها القوة معلومة كدالة للزمن t فقط • فيكون حل معادلة الحركة على شكل تكامل ثنائي بسيط • اما في الحالات الاخرى جميعها فيجب استعمال الطرق المتنوعة لحل المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية لايجاد الموضع x كدالة للزمن t •

مثـــــــال

قالب كان ابتدائيا في حالة السكون على سطح افقي املس • فـــــــي الزمن $t = 0$ ، سلطت عليه قوة افقية متزايدة تزايدا ثابتا ــ اى $F = ct$.
جـد السـرعة و الازاحـة كدوال للزمن •

من المعادلة الـ... ية للحركة

$$ct = m\frac{dv}{dt}$$

فـان

$$v = \frac{1}{m}\int_0^t ctdt = \frac{ct^2}{2m}$$

و

$$x = \int_0^t \frac{ct^2}{2m}\,dt = \frac{ct^3}{6m}$$

حيث ان موضع القالب الابتدائي كان في نقطة الاصل ($x = 0$)

٣ــ١٠) الحركة الشـاقولية في وسـط مقاوم ــ سـرعة المنتهي

Vertical Motion in a Resisting Medium. Terminal Velocity

يتعرض الجسـم السـاقط شـاقوليا في الهواء او فى اى مائع آخر الى مقاومـة اللزوجـة (viscous resistance) فاذا كانت المقاومة تتناسـب مع السـرعة v مرفوعة للقوة الاولى (الحالة الخطيـة) ، نسـتطيع تمثيـل قوة المقاومة بالكمية $-cv$ بصرف النظر عن اشـارة v ، لان المقاومة تكون دائما معاكسـة لاتجاه الحركة • وثابت التناسـب c يعتمـد على حجم و شـكل الجسـم وعلى لزوجـة المائـــع • لنأخـذ المحـور ــ x موجبـا الى الاعلى • عندئذ تكون المعادلة التفاضلية للحركة

$$-mg - cv = m\frac{dv}{dt} \qquad (٣ــ٣٢)$$

ولما كانت القوة دالة للسرعة v لذلك نحصل على

$$t = \int \frac{mdv}{F(v)} = \int_{v_o}^{v} \frac{mdv}{-mg-cv} = -\frac{m}{c} \ln \frac{mg + cv}{mg + cv_o}$$

والتي يمكن حلها بسهولة للسرعة v اى

(٣ ـ ٣٣) $$v = -\frac{mg}{c} + \left(\frac{mg}{c} + v_o\right) e^{-ct/m}$$

يهبط الحد الاسي الى مقدار مهمل بعد مرور فترة زمنية كافية $(t \gg \frac{m}{c})$ وبذلك تقترب السرعة من الغاية $-mg/c$. وتسمى سرعة الغاية للجسم الساقط بـ سرعة المنتهي terminal velocity،وهي تلك السرعة التي تكون فيها قوة المقاومة مساوية تماما و معاكسة لثقل الجسم بحيث تكون القوة الكلية على الجسم تساوى صفرا • ويسمى مقدار سرعة المنتهي بانطلاق المنتهي terminal speed. فمثلا ، انطلاق المنتهي لقطرة المطر الساقطة ينحصر بين ٦م/ ثا و ٣م/ ثا وذلك يعتمد على حجمها •

المعادلة (٣ ـ ٣٣) تعبر عن v كدالة للزمن t ،وبتكاملها للمرة الثانية نحصل على x كدالة للزمن t •

(٣ ـ ٣٤) $$x - x_o = \int_0^t v(t)dt = -\frac{mg}{c} t + \left(\frac{m^2 g}{c^2} + \frac{mv_o}{c}\right)(1 - e^{-ct/m})$$

لنمثل انطلاق المنتهي $\frac{mg}{c}$ بالرمز v_t ولنكتب $\mathcal{T}$ (الذى قد نسميه بالزمن النوعي Characteristic Time) للكمية m/c. فعندئذ يمكن كتابة المعادلة (٣ ـ ٣٣) على الشكل التالي الاكثر اهمية

(٣ ـ ٣٥) $$v = -v_t + (v_t + v_o) e^{-t/\mathcal{T}}$$

وتصبح المعادلة (٣ ـ ٣٤)

$$x = x_o - v_t t + x_1(1 - e^{-t/\mathcal{T}})$$ (٣ـ٣٦)

حيث $$x_1 = \frac{m^2 g}{c^2} + \frac{mv_o}{c} = g\mathcal{T}^2 + v_o\mathcal{T}$$

لذلك اذا اسقط جسم من السكون ($v_o = 0$) فمن المعادلة (٣ـ٣٥) نستنتج بانه سوف يبلغ انطلاقا مقداره $1-e^{-1}$ مضروبا في انطلاق المنتهي في الزمن $\mathcal{T}$ و $(1-e^{-2})v_t$ في زمن $2\mathcal{T}$ ، وهلم جرا . وبعد زمن $10\mathcal{T}$ يصبح الانطلاق تقريبا مساويا للقيمة النهائية ، اى $0.99995\, v_t$

اذا كانت مقاومة اللزوجة تتناسب مع v^2 (حالة الدرجة الثانية) فالمعادلة التفاضلية للحركة بعد ان تتذكر باننا اخذنا الاتجاه الموجب الى الاعلى تكون :

$$-mg \pm cv^2 = m\frac{dv}{dt}$$ (٣ـ٣٧)

وتشير الاشارة السالبة لحد المقاومة الى ان اتجاه الحركة الى الاعلى (v موجبة) كما تشير الاشارة الموجبة الى ان اتجاه الحركة الى الاسفل (v سالبة) والاشارتان ضروريتان لاية قوة مقاومة تحتوى على v مرفوعة الى عدد زوجي . وكما في الحالة السابقة يمكن تكامل المعادلة التفاضلية للحركة لتعطى t كدالة للسرعة v .

$$t = \int \frac{m\,dv}{-mg - cv^2} = -\mathcal{T}\tan^{-1}\frac{v}{v_t} + t_o$$ (للصعود)

$$t = \int \frac{mdv}{-mg + cv^2} = -\mathcal{T}\tan^{-1}\frac{v}{v_t} + t_o'$$ (للسقوط)

حيث

(يمثل الزمن النوعي) $\sqrt{\dfrac{m}{cg}} = \tau$

و

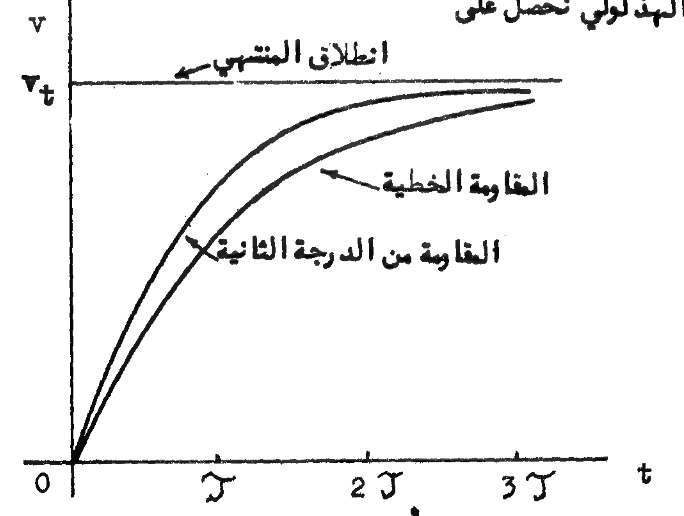
(يمثل انطلاق المنتهي) $\sqrt{\dfrac{mg}{c}} = v_t$

وعند الحل للسرعة v

(٣ ــ ٣٨) (للصعود) $$v = v_t \tan \frac{t_o - t}{\tau}$$

(٣ ــ ٣٩) (للسقوط) $$v = -v_t \tanh \frac{t - t_o'}{\tau}$$

اذا اطلق الجسم من السكون في الزمن $t = 0$ عندئذ يكون $t_o' = 0$ ومن تعريف الظل الهذلولي نحصل على



الشكل (٣ ــ ٣) الخطوط البيانية لتغيير الانطلاق مع زمن جسم ساقط تحت تأثير مقاومة الهواء الخطية و من الدرجة الثانيــة ..

$$v = -v_t \tanh \frac{t}{\tau} = -v_t \left(\frac{e^{t/\tau} - e^{-t/\tau}}{e^{t/\tau} + e^{-t/\tau}} \right) \qquad (٣ - ٤٠)$$

مرة ثانية نرى بان انطلاق المنتهي يصل اليه عمليا بعد مرور بضعة ازمان نوعية فمثلا عندما يكون $t = 5\tau$ يكون الانطلاق $0.99991\ v_t$ الشكل (٣-٣) يبين تغيير الانطلاق مع زمن السقوط لقانوني المقاومة الخطية ومن الدرجة الثانية .

من المفيد ملاحظة ان الزمن τ يساوي v_t/g في الحالتين الخطية ومن الدرجة الثانية . فمثلا - اذا كان انطلاق المنتهي لمظلي يساوي ١ر٢ متر في الثانية فالزمن النوعي يساوي ١ر٢ متر في الثانية \ ٩ر٨ متر في (الثانية)^2 ويساوي $\frac{١}{٨}$ ثانية .

ويمكن تكامل العلاقات (٣-٣٨) و (٣-٣٩) لتعطي علاقات صريحة للموضع x كدالة للزمن t .

٣-١١) تغيير الجاذبية مع الارتفاع

Variation of Gravity with Height

لا تكون قوة جذب الارض فوق سطحها ثابتة بل متغيرة وفقاً لقانون التربيع العكسي للمسافة (قانون نيوتن للجاذبية)[٣] . اذن قوة جذب الارض على جسم كتلته m هي :

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \qquad (٣ - ٤١)$$

---

(٣) سندرس قانون نيوتن للجاذبية بصورة مفصلة في الفصل السادس .

حيث G يمثل ثابت الجاذبية و M كتلة الارض و r المسافة بين مركز الكرة الارضية والجسم • اذا اهملنا مقاومة الهواء تكون المعادلات التفاضلية للحركة على النحو التالي

$$m\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2}$$

وعند كتابة $\ddot{r} = \dot{r}\,\frac{d\dot{r}}{dr}$ نستطيع ان نكامل كما يلي

$$m\int \dot{r}\,d\dot{r} = -GMm\int \frac{dr}{r^2}$$

$$\tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{GMm}{r} = E \qquad (٣_٤٢)$$

والتي فيها E هو ثابت التكامل • وهذه بالضبط معادلة الطاقة • مجموع الطاقة الحركية (الحد الاول) والطاقة الكامنة ($-\frac{GMm}{r}$) يبقى ثابتا اثناء حركة الجسم الساقط •

لنطبق المعادلة المذكورة اعلاه على حالة قذيفة رميت الى الاعلى من سطح الارض بانطلاق ابتدائي مقداره v_0 فالثابت E اذن يكون

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_e} = E$$

حيث r_e يمثل نصف قطر الكرة الارضية • والانطلاق على اي ارتفاع x عندئذ يكون

$$v^2 = v_0{}^2 + 2GM\left(\frac{1}{r_e+x} - \frac{1}{r_e}\right) \qquad (٣_٤٣)$$

والان قوة جذب الارض عند سطحها هي

$$-\frac{GMm}{r_e^2} = -mg$$

والتعجيل الارضي على السطح اذن يكون

$$g = \frac{GM}{r_e^2}$$

لذلك يمكن كتابة علاقــة الانطلاق على النحو التالي

$$v^2 = v_o^2 + 2g\left(\frac{r_e^2}{r_e + x} - r_e\right)$$

$$= v_o^2 - 2gx\left(1 + \frac{x}{r_e}\right)^{-1} \qquad (٣ــ ٤٤)$$

وتختصر المعادلة اعلاه الى المعادلة المالوفة لمجال الجاذبية المنتظــم •

$$v^2 = v_o^2 - 2gx$$

اذا كانت x صغيرة جدا بالمقارنة مع r_e بحيث يمكن اهمال الحد $\frac{x}{r_e}$ بالنســبة الى الواحــد

نحصل على نقطة رجــوع حركة القذيفــة • اى اعظم ارتفاع تبلغـه وذلك بوضع $v=0$ وحل المعادلة للموضع x • فالنتيجــة تكــون

$$x_{max} = h = \frac{v_o^2}{2g}\left(1 - \frac{v_o^2}{2gr_e}\right)^{-1} \qquad (٣ــ٤٥)$$

مرة اخرى نحصل على العلاقة الاعتيادية

$$h = \frac{v_o^2}{2g}$$

اذا امكن اهمال الحــد الثاني

اخيرا ننطبق العلاقة الدقيقة (٣ــ٤٥) لايجاد قيمة v_o التي تعطي h قيمة لا نهائيــة • هــذه تسمى بانطلاق الافلات escape speed ومن الواضح يمكن ايجاد قيمتهــا بوضع الكمية داخل الاقواس مســاوية للصفر ــ النتيجــة هي :

هذه تعطي

$$v_e = (2gr_e)^{\frac{1}{2}}$$

لقيمـــــــة انطلاق الافلات العددية من سطح الارض

$$v_e \simeq 11 \text{ km/sec.}$$

ان معدل سرعة جزيئة الهواء (N_2, O_2) في جو الكرة الارضية يساوى حوالي ٥ر٠ كم/ثا [٤] الذى يصغر انطلاق الافلات بكثير ولذلك تحتفظ الارض بجوها عكس ذلك ، القمر ، الخالي من الجو لان انطلاق الافلات على سطحه اصغر منه على سطح الارض بسبب صغر كتلته ، ولهذا السبب اختفى اخيرا الاوكسجين والنتروجين من على سطحه ، ومع ذلك فان جو الارض هو بدوره ايضا لا يحتوى على كمية ذات اهمية تذكر من الهيدروجين بالرغم من كثرته في الكون ككل • لقد ترك الهيدروجين جو الارض منذ زمن بعيد لان الانطلاق الجزيئي من الكبر (بسبب صغر كتلة جزيئة الهيدروجين) بحيث ان هناك عددا كبيرا من جزيئات الهيدروجين انطلاقها في اية لحظة يفوق انطلاق افلات الارض •

٣ـ١٢) القوة المعيدة الخطية ـ الحركة التوافقية

Linear Restoring Force. Harmonic Motion

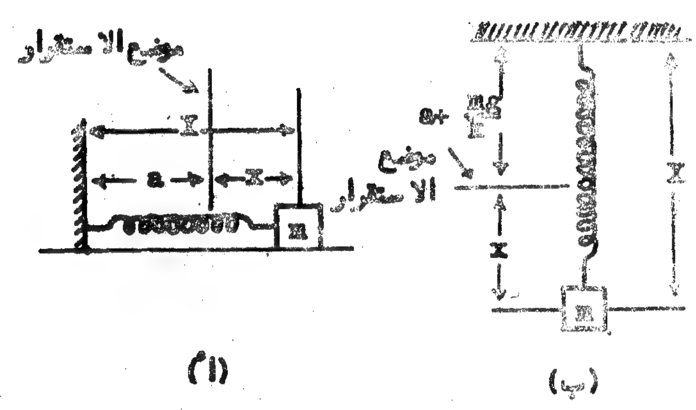
واحدة من اهم حالات الحركة على خط مستقيم من الناحية العملية والنظرية هي تلك الحركة التي تحدثها قوة معيدة خطية Linear Restoring Forc هذه القوة يتناسب مقدارها مع ازاحة الجسيم من موضع الاستقرار واتجاهها يكون دائما مضادا لاتجاه الازاحة • قوة كهذه يصحبها وتر مرن او نابض يخضعان لقانون هوك

$$F = -k(X - a) = -kx \qquad (٣ـ٤٦)$$

---

(٤) وفقا للنظرية الحركية Kinetic Theory ان معدل انطلاق جزيئة الغاز يساوى $(3kT/m)^{\frac{1}{2}}$ حيث k يمثل ثابت بولتزمان ويساوى ١٫٣٨ × ١٠ $^{-١٦}$ ارك لكل درجة ، و T درجة الحرارة المطلقة و m كتلة الجزيئة •

حيث X يمثل الطول الكلي و a طول النابض عندما يكون غير مضغوط (القوة تساوي صفراً) . يمثل المتغير $x=X-a$ ازاحة النابض من موضع الاستقرار ويسمى ثابت التناسب k بالمرونة Stifness.
لنفرض ان جسماً كتلته m قد ربط بالنابض كما هو مبين في الشكل (٣ـ ٤ أ)



الشكل (٣ـ٤) تمثيل التذبذب التوافقي الخطي بواسطة جسم كتلته m ونابض (أ) الحركة الافقية (ب) الحركة الشاقولية

فالقوة المؤثرة على الجسم تعطى من المعادلة (٣ ـ ٤٦) .
لنفرض ان نفس النابض والجسم علقا شاقولياً كما هو مبين في الشكل (٣ـ ٤ ب) فالقوة الكلية التي تؤثر على الجسم الان هي :

$$F = -k\ (X - a) + mg \qquad (٣ـ٤٧)$$

حيث الاتجاه الموجب نحو الاسفل . والان لنقيس x في الحالة الاخيرة بالنسبة لموضع الاستقرار الجديد . اي ان $x=X-a-mg/k$
هذا يعطي $F= -kx$ مرة ثانية وهكذا المعادلة التفاضلية للحركة

في اى من الحالتين تكون

$$-kx = m\ddot{x}$$

او

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad (٣-٤٨)$$

تصادفنا المعادلة التفاضلية للحركة المذكورة اعلاه في مسائل فيزيائية متنوعة وكثيرة . في المثال الخاص الذى نستخدمه هنا ، الثابتان m ، k يمثلان كتلة الجسم و مرونة النابض على التتالي و الازاحة x هي مسافة . وكما سنرى فيما بعد ان نفس هذه المعادلة ستستعمل في حالة البندول ولكن الازاحة تكون زاوية و الثوابت هي التعجيل الارضي و طول البندول . كما ان هذه المعادلة تطبق في بعض الدوائر الكهربائية الخاصة ، ولكن الثوابت تمثل بيرمترات (Parameters) الدائرة ، والكمية x تمثل التيار الكهربائي او الفولتية

يمكن حل المعادلة (٣-٤٨) بطرق عديدة . و هناك صنف مهم من المعادلات التفاضلية يعرف بالمعادلات التفاضلية الخطية ذات العوامل الثابتة (٥) . عدد كبير من المعادلات التفاضلية في الفيزياء ان لم تكن معظمها هي معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الثانية . وسنستخدم طريقة التجربة لحل المعادلة (٣-٤٨) والتي ستكون فيها الدالة Ae^{qt} هي تجربة الحل و q هو ثابت علينا ايجاد مقداره . فاذا كان $x=Ae^{qt}$ هو فعلا الحل ، عندئذ يجب ان نحصل لجميع قيم t على

$$m\frac{d^2}{dt^2}(Ae^{qt}) + k(Ae^{qt}) = 0$$

وعند اختصار العوامل المشتركة نحصل على المعادلة التالية (٦)

---

(٥) معادلة الرتبة النونية العامة لهذا النوع هي $c_n\frac{d^n x}{dt^n}+\dots+c_2\frac{d^2x}{dt^2}+c_1\frac{dx}{dt}+c_0=b(t)$

وتسمى هذه المعادلة متجانسة homogeneous اذا كان $b = 0$

(٦) هذه المعادلة تسمى بالمعادلة المساعدة

اى ان

$$mq^2 + k = 0$$

$$q = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\,\omega_o$$

حيث

$$\omega_o = \sqrt{k/m} \quad , \quad i = \sqrt{-1}$$

ولما كانت حلول المعادلة التفاضليــة الخطية تجمــع (اى ، اذا كان f_2, f_1 حلين ، عندئذ مجموعهما f_1+f_2 يكون حلاً ايضا) اذن الحــل العــــام للمعادلــة (٣ ــ ٢٨) هــو

$$x = A_+e^{i\,\omega_o t} + A_-e^{-i\,\omega_o t} \qquad (٣ـ٤٩)$$

ولما كان $e^{iu}=\cos u + i \sin u$ ، فالاشكال الاخرى للحلول هـــي

$$x = a \sin \omega_o t + b \cos \omega_o t \qquad (٣ـ٥٠)$$

او

$$x = A \cos (\omega_o t + \theta_o) \qquad (٣ـ٥١)$$

وتحسب قيم ثوابت التكامل في الحلول المذكورة توا من الشــروط الابتدائية وبالتعـــويض المباشــر يمكن التحقق من ان جميع التعابير الجبرية الثلاثة هي حلــــــول للمعادلة (٣ـ٤٨) .

الحركة هي تذبذب منحني الجيب للازاحــة x . ولهذا السـبب تسـمى غالبــا المعادلة (٣ـ٤٨) بالمعادلة التفاضليــة للتذبذب التوافقي او المتذبـــذب الخطــــي .

يســمى المعامل ω_o بالتردد الزاوى angular frequency والقيمة العظمــى للازاحــة x بســعة التذبذب ، وهو الثابت A في المعادلة (٣ـ٥١) ، او $(a^2+ b^2)^{\frac{1}{2}}$ في المعادلة (٣ـ٥٠) وزمن الذبذبــة "Period" T_o هو الزمن اللازم لــدورة كاملــة ، كما هو مبين في الشــكل (٣ـ٥) ، اى ان زمن الذبذبــة هو الزمن الــذى يزداد فيه ωt بمقدار 2π ، اى

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (٣-٥٣)$$

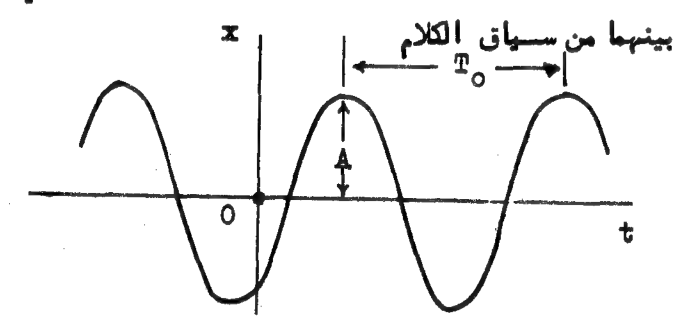
ويعرّف التردد الخطي f_0 للمتذبذب بعدد الدورات في وحدة الزمن اذن

$$\omega_0 = 2\pi\ f_0$$

و

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

تستعمل كلمة " التردد " عادة للتردد الزاوى او الخطي ويمكن التمييز بينهما من سياق الكلام



الشكل (٣-٥) العلاقة بين الازاحة والزمن للمتذبذب التوافقي

مثال

تمطط نابض خفيف بمقدار b عندما يعلق به قالب كتلته m • فاذا سحب القالب الى الاسفل مسافة ℓ من موضع استقراره وترك في الزمن t=o جد محصلة الحركة للزمن t •

اولا — لايجاد مرونة النابض ، نلاحظ من شرط التوازن السكوني ان

$$F = -kb = -mg$$

اى

$$k = \frac{mg}{b}$$

و نجمتين بعيدتين كنقاط مرجعية • وقد اتفق بصورة عامة ان تكون المحاور النيوتونية الاخيرة في مفهوم الميكانيك النيوتوني هي التي تعتمد على معدل خلفية جميع المادة الموجودة في الكون •

٣ـ٣) الكتلة والقوة • قانوني نيوتن الثاني والثالث

Mass and Force. Newton's Second and Third Laws

من الحقائق المالوفة لدينا جميعا اننا عند رفع حجر كبير لا نعاني صعوبة كصعوبة تحريكه (او ايقافه) بينما لا نجد صعوبة بهذا المستوى في التعامل مع قطعة خشبية صغيرة فنقول ان القصور الذاتي للحجر اكبر من الخشب والقياس الكمي للقصور الذاتي يسمى بالكتلة • لنفرض ان عندنا جسيمين B,A فكيف نحسب مقياس القصور الذاتي لاحدهما بالنسبة الى الاخر ؟ هناك تجارب عديدة يمكن استنباطها للاجابة على هذا السؤال منها محاولة جعل الجسيمين يؤثر احدهما على الاخر كربطهما بلولب حلزوني مثلا ، عندئذ نجد من التجارب الدقيقة ان تعجيلي الجسيمين يكونان دائما متعاكسين بالاتجاه والنسبة بينهما ثابتة (على فرض ان التعجيل معطي في المحاور النيوتونية واخذ بنظر الاعتبار التأثير المتبادل للجسيمين A و B فقط) ويمكننا التعبير عن هذه الحقيقة المهمة جدا والاساسية بالمعادلة التالية :

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = -\frac{d\vec{v}_B}{dt}\mu_{BA} \qquad (٣ـ١)$$

الثابت μ_{BA} يمثل في الحقيقة معيار القصور الذاتي النسبي للجسم B بالنسبة الى A من المعادلة (٣ـ١) ينتج ان $\mu_{BA}=1/\mu_{AB}$ اذن قد نعبر عن μ_{BA} بالنسبة $\mu_{BA}=\frac{m_B}{m_A}$ حيث استعمل جسم ما كمعيار لوحدة القصور الذاتي • الان النسبة m_B / m_A يجب ان تكون مستقلة عن اختيار الوحدة • هذه الحالة ستكون نفسها اذا كان لاى جسم ثالث C

$$\frac{\mu_{BC}}{\mu_{AC}} = \mu_{BA}$$

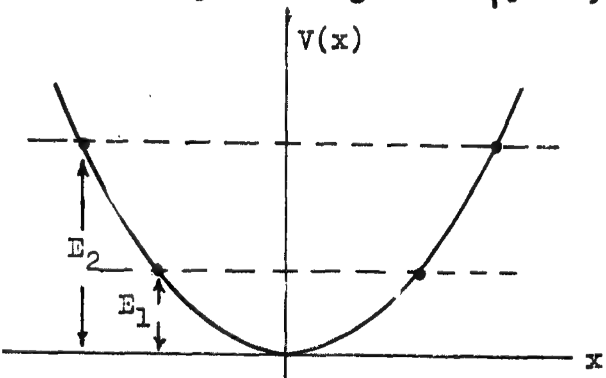
وهذه يمكن تكاملها للحصول على t كدالـة للازاحـة x كالاتي :ـ

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{(2E/m) - (k/m)x^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \cos^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) + C$$

حيث

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

و C هو ثابت التكامل • عند حل المعادلة المتكاملة للموضـع x كدالـــة للزمـن t نجـد بان النتيجـة التي سـوف نحصل عليها هي نفس العلاقة التي حصلنا عليهـا في البنـد السـابق ، سـوى اننا الان نحصل على قيمـة واضحـة للسـعة A • ويمكننا ايضا ايجـاد السـعة مباشـرة من معادلـة الطاقـة (٣ ـ ٥٥) وذلك بملاحظـة ان قيمة x يجب ان تقـع بـيـن $\sqrt{2E/k}$ و $-\sqrt{2E/k}$ لكي تكون $\dot{x}$ حقيقيـة • لقد وضحت هذه النتيجـة في الشـكل (٣ ـ ٦) الذي يبـين دالـة الطاقـة الكامنـة ونقـاط رجوع الحركـة لقيم مختلفـة من الطاقـة الكليـة E .



الشـكل (٣ـ٦) مخطط دالة الطاقة الكامنة لمتذبذب توافقي • وقد وضحت نقاط الرجوع التي تعرّف السـعة لقيمتين من الطاقة الكليـة•

نلاحظ من معادلة الطاقــة ان القيمــة العظمى لـ $\dot{x}$ تحدث عندما يكــون $x=0$ والتي ســنســميها v_{max} وبذلك نحصل على

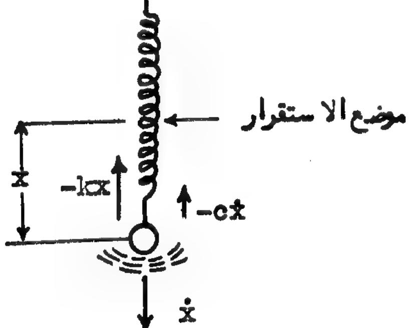
$$E = \tfrac{1}{2}mv_{max}{}^2 = \tfrac{1}{2}kA^2$$

او

$$v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}}\; A = \omega_o A \qquad (٣\text{ـ}٥٧)$$

(٣ـ١٤) الحركــة التوافقيــة المتضائلــة Damped Harmonic Motion

التحليل الســابق للمتذبذب الــتوافقي كان مثاليا الى حــد ما لاننا اخفقنــا في اخــذ قوى الاحتكاك بنظر الاعتبار • وهذه تتواجــد دائما • بمقدار ما • في الاجهزة الميكانيكيــة • كما في الدوائر الكهربائيــة التي تحتوى دائما علــى كميــة معينــة من المقاومــة • وعلى ســبيل المثال • لنعتبر حركــة جســـم معلق بنابض مرونتــه k . وســنفرض وجــود قوة معيقــة لزجــه تتغير خطيــا مع الانطــلاق (كما في البند ٣ ــ ٨) • اى • كالتي تســببها مقاومة الهواء وقد وضحت هذه القوى في الشــكل (٣ ــ ٧) •



الشــكل (٣ ــ٧) المتذبذب التوافقي المتضائــل

اذا كانت x تمثــل الازاحــة موضع الاســتقرار • فان القــوة المعيــدة التي يوثر بهــا النابض هي $-kx$ والقوة المعيقــة هي $-c\dot{x}$ حيث c يمثل ثابت التناســب • اذن تصبح المعادلة التفاضلية للحركــــة $F = m\ddot{x}$

على النحو التالي :

$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

او

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad (٣ - ٥٨)$$

مرة اخرى كالسابق سنستعمل الدالة الاسية Ae^{qt} كحل تجريبي للمعادلة و هي حل اذا كان

$$m \frac{d^2}{dt^2} (Ae^{qt}) + c \frac{d}{dt} (Ae^{qt}) + k(Ae^{qt}) = 0$$

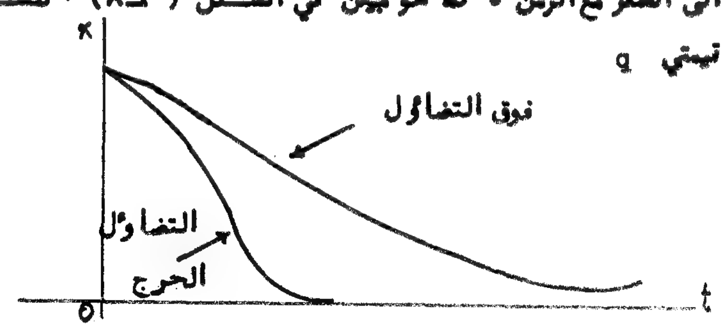
لجميع قيم t ، وهذه ستكون الحالة اذا استوفت q المعادلة المساعدة التالية :

$$mq^2 + cq + k = 0$$

و التي نحصل على جذورها بطريقة الدستور لمعادلات الدرجة الثانية المعروفة

$$q = \frac{-c \pm (c^2 - 4mk)^{1/2}}{2m} \qquad (٣ - ٥٩)$$

في الحالات التي تكون فيها $c^2 > 4mk$ (فوق التضاؤل over damping) و $c^2 = 4mk$ (حالة التضاؤل الحرجة critical damping) تكون q حقيقية و سالبة ، لذلك تكون الحركة غير ذبذبية و تهبط الازاحة x اسيا الى الصفر مع الزمن ، كما هو مبين في الشكل (٣ - ٨) ، لنسمي $-\gamma_1$ و $-\gamma_2$ قيمتي q



الشكل (٣ - ٨)

مخططا العلاقة بين الازاحة و الزمن للحالتين فوق التضاؤل و التضاؤل الحرج لمتذبذب توافقي

المبينة بالمعادلة (٣ـ٥٩) لحالة فوق التضاؤل • عندئذ يمكن كتابة الحل العام على النحو التالي :

$$x = A_1 e^{-\gamma_1 t} + A_2 e^{-\gamma_2 t} \qquad (٣ـ٦٠)$$

في حالة التضاؤل الحرج تكون جذور المعادلة متساوية و الحل العام يكون كما يلي :

$$x = e^{-\gamma t}(A_1 + A_2 t) \qquad (٣ـ٦١)$$

حيث $\gamma = c/2m$ و يمكن تحقيق الحل المذكور اعلاه بالتعويض المباشر •
اذا كان ثابت المقاومة c صغيرا بحيث يكون $c^2 < 4mk$ نحصل على الحالة الثالثة (حالة دون التضاؤل Underdamping). و في هذه الحالة تكون q خيالية • وجذرا المعادلة المساعدة يكونان عددين مركبين متوافقين و تعطي الحركة بالحل العام التالي :

$$x = A_+ e^{(-\gamma + i\omega_1)t} + A_- e^{(-\gamma - i\omega_1)t} \qquad (٣ـ٦٢)$$

حيث

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2} \qquad (٣ـ٦٣)$$

عند استعمال العلاقة $e^{iu} = \cos u + i \sin u$
نرى ان الحل يمكن كتابته على النحو التالي :

$$x = e^{-\gamma t}(A_+ e^{i\omega_1 t} + A_- e^{-i\omega_1 t})$$

$$= e^{-\gamma t}\left[(iA_+ - iA_-)\sin \omega_1 t + (A_+ + A_-)\cos \omega_1 t\right]$$

او

$$x = e^{-\gamma t}(a \sin \omega_1 t + b \cos \omega_1 t) \qquad (٣ـ٦٤)$$

حيث

$$b = A_+ + A_- \,, \quad a = i(A_+ - A_-)$$

يمكننا كذلك كتابة الحل على النحو التالي

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \theta_o) \qquad (٣ـ٦٥)$$

حيث $\theta_0 = -\tan^{-1}(\frac{b}{a})$, $A = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$

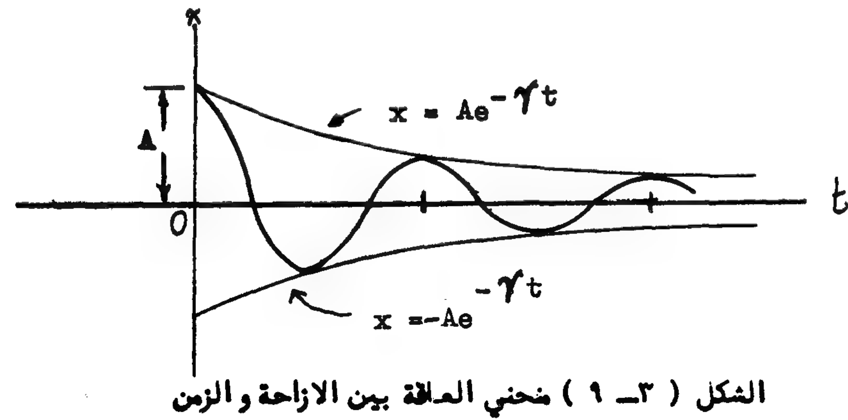
تبين الصيغة الحقيقية للحل ان الحركة ذبذبية و ان السعة $Ae^{-\gamma t}$ تتضائل اسيا مع الزمن • اضف الى ذلك اننا نلاحظ ان التردد الزاوي للتذبذب ω_1 هو اقل من المتذبذب الحر ω_0 ويسمى التردد ω_1 بالتردد الطبيعي •

في حالة التضاؤل الضعيف • اذا كانت γ صغيرة جدا بالمقارنة مع ω_0 نحصل على العلاقة المقربة التالية :

$$\omega_1 \simeq \omega_0 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0} \qquad (٣_٦٦)$$

والتي تنتج من فك الطرف الايمن للمعادلة (٣_٦٣) باستخدام نظرية ذات الحدين واستبقاء الحدين الاولين فقط ••

يبين الشكل (٣_٩) رسم لمنحني الحركة • ونستنتج من المعادلة (٣_ ٦٥) ان المنحنيين $x = Ae^{-\gamma t}$, $x = -Ae^{-\gamma t}$ يكونان غلافا" لمنحني الحركة • لان عامل الجيب تام يأخذ القيم بين + ١ و_ ١ • بضمنها + ١ و_١ والتي يمس فيها منحني الحركة • الغلاف • لذلك تنفصل نقاط التماس بفترة زمنية مقدارها نصف مدة الذبذبة • او π/ω_1 • ولكن هذه النقاط هي ليست تماما القيم العظمى و الصغرى للازاحة x • وقد ترك للطالب ايجاد



الشكل (٣_ ٩) منحني العلاقة بين الازاحة و الزمن لمتذبذب توافقي في حالة التضاؤل

قيم t التي تأخذ فيها الازاحة قيمها العظمى والصغرى •

اعتبارات الطاقة Energy Consideration

الطاقة الكلية لمتذبذب توافقي متضائل تساوي في أية لحظة مجموع الطاقة الحركية $\frac{1}{2} m\dot{x}^2$ والطاقة الكامنة $\frac{1}{2} kx^2$ ، اى

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

وقد رأينا ان هذا المجموع ثابت للمتذبذب غير المتضائل •
لنفاضل المعادلة المذكورة اعلاه بالنسبة للزمن t لايجاد معدل التغيير الزمني لـ E . اى

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = (m\ddot{x} + kx)\dot{x}$$

ولكن من المعادلة التفاضلية للحركة ، اى المعادلة (٣ــ ٥٨) والتي هي نحصل على

$$m\ddot{x} + kx = -c\dot{x}$$

$$\frac{dE}{dt} = -c\dot{x}^2 \qquad (٣ــ ٦٧)$$

وهذه دائما سالبة وتمثل معدل تبدد الطاقة الى حرارة بالاحتكاك •

امثلــــة

١ــ علق جسيم كتلته m بنابض مرونته k • وكان التضاؤل بحيث $\gamma = \omega_o/4$
اوجد التردد الطبيعي •
من المعادلة (٣ ــ ٦٣)

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{\omega_o^2}{16}} = \omega_o\sqrt{\frac{15}{16}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{15}{16}}$$

٢ــ في المثال المذكور اعلاه اوجد النسبة بين سعتي ذبذبتين متعاقبتين •

من النظرية السابقة • تكون النسبة كالاتي :

$$\frac{Ae^{-\sqrt{}T_1}}{A} = e^{-\sqrt{}T_1}$$

حيث ان

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

اذن في مثالنا

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_o}\sqrt{\frac{16}{15}} = \frac{2\pi}{4\sqrt{}}\sqrt{\frac{16}{15}}$$

او

$$\sqrt{}T_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{16}{15}} = 1.56$$

اذن النسبة بين ذبذبتين متعاقبتين هي :

$$e^{-1.56} = 0.21.$$

٣ ــ ١٥) الحركة التوافقية الاضطرارية ــ الرنين

Forced Harmonic Motion. Resonance

سندرس في هذا البند حركة المتذبذب التوافقي المتضائل المدفوع بقوة خارجية توافقية • اى قوة تتغير بدالة جيبية sinusoidally مع الزمن • افرض ان لهذه القوة المسلطة F_{ext} ترددا زاويا ω وسعة معينة F_o وبذلك يمكن تمثيلها

$$F_{ext} = F_o \cos(\omega t + \theta)$$

و من الافضل استخدام الصيغة الاسية

$$F_{ext} = F_o e^{i(\omega t + \theta)}$$

بدلا من الجيبية [٧]. عندئذ تكون القوة الكلية مساوية لمجموع القوى الثلاث التالية ـ القوة المعيدة للمرونة $-kx$ ، قوة التضاؤل للزوجة $-c\dot{x}$ ، القوة الخارجية F_{ext} . لذلك تصبح المعادلة التفاضلية

$$-kx - c\dot{x} + F_{ext} = m\ddot{x}$$

او

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{ext} = F_o e^{i(\omega t + \theta)} \qquad (٣ ـ ٦٨)$$

يتكون حل المعادلة التفاضلية الخطية المذكورة اعلاه من مجموع الجزئين التالين الاول من حل المعادلة المتجانسة $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ والذى سبق وان وجدناه في البند السابق والثاني اى حل خاص للمعادلة . كما رأينا ، ان حل المعادلة المتجانسة يمثل تذبذبا يتضاءل في اخر الامر الى الصفر والذى يسمى بالحد العابر Transient term. ان ما يهمنا هو الحل الذى يعتمد على طبيعة القوة المسلطة . ولما كانت سعة هذه القوة ثابتة وتتغير دالتها جيبيا مع الزمن ، فمن المعقول توقع امكانية ايجاد حل تكون فيه الازاحة x دالة جيبية متغيرة مع الزمن ايضا . لذن ، لشرط حالة الاستقرار ، سنجرب حلا من النوع التالي

$$x = Ae^{i(\omega t + \theta')}$$

---

(٧) يمكن كتابة الصيغة الاسية على النحو التالي

$$F_{ext} = F_o \cos(\omega t + \theta) + iF_o \sin(\omega t + \theta)$$

والمعادلة التفاضلية الناتجة تكون مستوفية اذا تساوت الاجزاء الحقيقية والخيالية لجانبي المعادلة .

اذا كان هذا " الحدس صحيحا فيجب ان تصح المعادلة

$$m \frac{d^2}{dt^2}\left[Ae^{i(\omega t+\theta')}\right] + c\frac{d}{dt}\left[Ae^{(i\omega t+\theta')}\right] + kAe^{i(\omega t+\theta')}$$

$$= F_o e^{i(\omega t + \theta)}$$

لكل قيم t. وهذه تختصر بعد اجراء العمليات الرياضية واختصار العوامل المشتركة الى

$$-m\omega^2 A + i\omega cA + kA = F_o e^{i(\theta-\theta')} = F_o\left[\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta')\right]$$

وعند مساواة الاجزاء الحقيقية والخيالية لطرفي المعادلة نحصل على :

$$A(k - m\omega^2) = F_o \cos\phi \qquad (٣ــ ٦٩)$$

$$c\omega A = F_o \sin\phi \qquad (٣ــ ٧٠)$$

حيث فرق الطور او زاوية الطور $\theta' - \theta$ مثلت بالرمز ϕ وبقسمة المعادلة الثانية على الاولى واستخدام المتطابقة $\sin\phi/\cos\phi = \tan\phi$ نحصل على

$$\tan\phi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \qquad (٣ــ ٧١)$$

وبتربيع طرفي المعادلتين (٣ــ ٦٩) و (٣ــ ٧٠) وجمعهما ثم استخدام المتطابقة $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$ نجد ان

$$A^2(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2A^2 = F_o^2$$

وبحلها لسعة حالة الاستقرار التذبذبية A نحصل على

$$A = \frac{F_o}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \qquad (٣ - ٧٢)$$

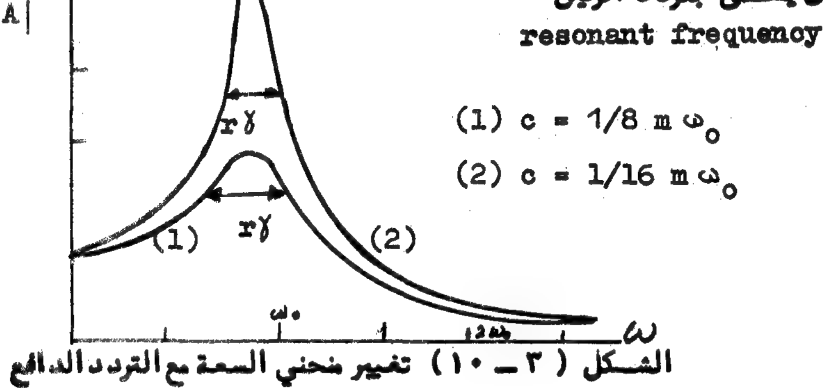
وبدلالة الاختصارات $\omega_o=\sqrt{k/m}$, $\gamma=c/2m$ نستطيع ان نكتب

$$\tan\phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_o^2 - \omega^2} \qquad (٣ - ٧٣)$$

و

$$A = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \qquad (٣ - ٧٤)$$

المعادلة المذكورة اعلاه والتي تبين العلاقة بين السعة A والتردد الدافع المؤثر impressed driving frequency هي من العلاقات الاساسية المهمة . يرينا المنحني في الشكل (٣ ـ ١٠) ان A لها قيمة عظمى لتردد معلوم ω_r والذي يسمى بتردد الرنين resonant frequency



الشكل (٣ ـ ١٠) تغيير منحني السعة مع التردد الدافع

لايجاد تردد الرنين ، نحسب $dA/d\omega$ من المعادلة (٣ ـ ٧٤) ونضع النتيجة مساوية للصفر . وعند حل المعادلة الناتجة لـ ω نجد ان تردد الرنين يكون :

$$\omega = \omega_r = (\omega_o^2 - 2\gamma^2)^{1/2} \qquad (٣ - ٧٥)$$

في حالة التضاؤل الضعيف ، اي عندما يكون ثابت التضاؤل c صغيرا جدا $c \ll 2\sqrt{mk}$ او ما يكافئ ذلك اذا كان $\omega_o \gg \gamma$ عندئذ نرى ان تردد

الرنـين ω_r يكون تقريبا مسـاويا لتردد متذبذب حر مسـتمر دون تضـاؤل ــ فاذا استخدمنا نظريـة ذى الحدين لفك الطرف الايمن من المعادلة (٣ ــ ٧٥) واحتفظنا بالحدين الاول والثاني فقط نحصل على :

$$\omega_r \simeq \omega_0 - \frac{\gamma^2}{\omega_0} \qquad (٣ - ٧٦)$$

ويجب بمقارنـة المعادلتين (٣ ــ ٧٥) و (٣ ــ ٧٦) مع المعادلتين (٣ ــ ٣) و (٣ ــ ٦٦) اللتين تعطيان تردد التذبذب ω_1 لمتذبذب حر مستمر بوجـود التضاؤل . لنفرض ان ϵ تمثل الكميـة γ^2/ω_0 . عندئذ يمكننا كتابـة :

$$\omega_1 \simeq \omega_0 - ½ \epsilon \qquad (٣ - ٧٧)$$

لقيمة التردد الطبيعي التقريبية كذلك

$$\omega_r \simeq \omega_0 - \epsilon \qquad (٣ - ٧٨)$$

لقيمـة تردد الرنين التقريبيـة .

سـعة حالة الاسـتقرار في تردد الرنين ، يمكن الحصول عليه ، من المعـادلات (٣ ــ ٧٤) و (٣ ــ ٧٥) والذى سـنسـميه A_{max} والنتيجة هي :

$$A_{max} = \frac{F_0/m}{2\gamma(\omega_0^2 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}}} \simeq \frac{F_0}{c\,(\omega_0^2 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (٣ - ٧٩)$$

ويمكننا اهمال γ^2 في حالة التضاؤل الضعيف وكتابـة

$$A_{max} \simeq \frac{F_0}{2\gamma m\,\omega_0} = \frac{F_0}{c\,\omega_0} \qquad (٣ - ٨٠)$$

اذن تصبـح سـعة التذبذب التأثرى في شـرط الرنين كبيرة جـدا اذا كان ثـابت التضاؤل c صغيرا جـدا وبالعكس . قد يكون من المرغوب فيـه او لا يكون ــ الحصول على سـعة عالية للرنين في الاجهزة الميكانيكيـة . فمثلا يسـتعمل سـند او نـابـض في المحرك الكهربائي لتقليل انتقـال الاهتزازات وتختا ر مرونـة هذه المسـاند

بحيث تأمن ابتعاد محصلة تردد الرنين عن تردد المحرك المستمر .

في اغلب الاحيان ، تكون حدة قمة الرنين مهمة . لنفرض حالة التضاؤل الضعيف $\omega_0 \gg \gamma$. عندئذ يكون في امكاننا اجراء التعويضات التالية في علاقة السعة حالة الاستقرار ، اي في المعادلة (٣ ــ ٧٤)

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \simeq 2\omega_0(\omega_0 - \omega), \quad \gamma\omega \simeq \gamma\omega_0$$

هذا وعلاقة A_{max} يكون باستطاعتنا كتابة معادلة السعة بالصيغة التالية :

$$A = \frac{A_{max}\gamma}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}} \qquad (٣ ــ ٨١)$$

عندئذ ترينا المعادلة المذكورة اعلاه انه عندما تكون $|\omega_0 - \omega| = \gamma$ او ما يكافئ ذلك ، اذا كانت

$$\omega = \omega_0 \pm \gamma$$

عندئذ

$$A^2 = \tfrac{1}{2}A_{max}^2$$

وهذا يعني ان γ هي مقياس لعرض منحني الرنين . لذلك 2γ تمثل فرق التردد بين النقطتين اللتين تهبط فيهما الطاقة بمقدار نصف طاقة الرنين ، بسبب تناسب الطاقة مع A^2 . كما هو واضح من الشكل (٣ــ ١٠)

هناك طريقة اخرى لتوضيح حدة قمة الرنين وذلك بدلالة البرمتر Q الذي يسمى بمعامل النوعية Quality Factor للرنين وتعريفه هو

$$Q = \frac{\omega_r}{2\gamma} \qquad (٣ ــ ٨٢)$$

او للتضاؤل الضعيف

$$Q \simeq \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

لذلك العرض $\Delta\omega$ في منتصف نقطتي الطاقة تقريبا يساوي

$$\Delta\omega = 2\gamma \simeq \frac{\omega_0}{Q}$$

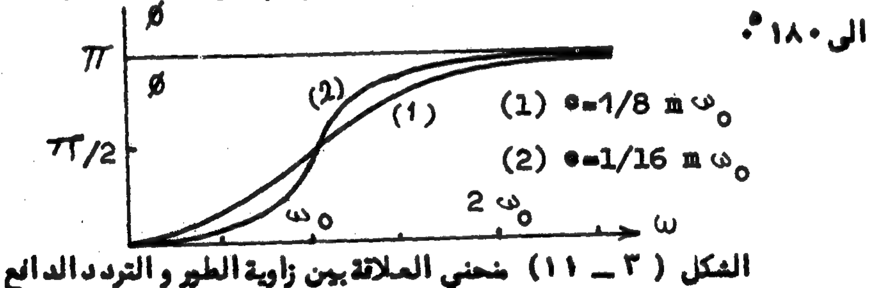
ولما كانت $\omega = 2\pi f$ اذن

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0} \simeq \frac{1}{Q} \qquad (٣ ــ ٨٣)$$

والتي تعطي العرض الجزئي لقمة الرنين .

تستخدم متذبذبات بلورات الكوارتز المدفوعة كهربائيا للسيطرة على محطات ارسال المذياع . وتقدر Q لبلورات الكوارتز في هذه التطبيقات بحوالي ١٠ ⁴. هذه القيم العالية ل Q تضمن بقاء تردد التذبذب تماما في تردد الرنين .

تعطي المعادلة (٣ـ ٧٣) فرق الطور ∅ بين القوة الدافعة المسلطة والاستجابة response وقد رسمت هذه المعادلة في الشكل (٣ـ١١) ، الذى يبين ∅ كدالة ل ω . نرى ان فرق الطور يكون صغيراً عندما تكون ω صغيرة بحيث تكون الاستجابة متوافقة الطور (In phase) مع القوة الدافعة . وتدازدادت ∅ الى $\pi/2$ في تردد الرنين ولذلك تكون الاستجابة مخالفة الطور ب ٩٠° ـ للقوة الدافعة في الرنين . واخيرا تقترب قيمة ∅ من π لقيم عالية جدا من ω ، اذن خلاف الطور بين حركة المنظومة والقوة الدافعة يكون مساويا الى ١٨٠°.



الشكل (٣ ـ ١١) منحني العلاقة بين زاوية الطور و التردد الدافع

امثلــــــة

١ـ احســب تردد الرنين و عامل النوعيــة للمتذبذب المتضائل في المثال (١) صفحــة (٩١) عندنا

$$\omega_r = (\omega_0^2 - 2\gamma^2)^{1/2}$$

$$= (\omega_0^2 - 2\omega_0^2/16)^{1/2}$$

$$= \omega_0 \sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\frac{7}{8}}$$

لتردد الرنين في المقياس الزاوي • و يعين عامل النوعية كما يلي :

$$Q = \frac{\omega_r}{2\gamma} = \frac{\omega_0(7/8)^{1/2}}{2(\omega_0/4)} = 2\sqrt{7/8} = 1.87$$

٢ـ اذا كان التردد المسلط يساوى $\omega_0 / 2$ للمتذبذب المذكور اعـــلاه جـد زاويــة الطور ϕ

من المعادلة (٣ ـ ٧٣) • عندنا

$$\tan\phi = \frac{2(\omega_0/4)(\omega_0/2)}{\omega_0^2 - (\omega_0/2)^2} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3$$

اذن

$$\phi = \tan^{-1}(1/3) = 18.5^\circ$$

٣ـ ١٦) الحركة تحت تأثير قوة دافعــة توافقيــة غير جيبيــة

Motion under a Nonsinusoidal Driving Force

من الضروري استخدام طريقــة اكثر تعقيدا من التي اســتخدمت في البنـــد السـابق لاجل تعيين حركة متذبذب توافقي تحت تأثير قـوة دافعة توافقيـة و لكن غير جيبيــة و من الملائم اسـتخدام قاعدة التداخل Principle of superposition لـهــذه الحالـــــة العامـــة وتنص هذه القاعدة ان امكن حل القوة المسلطة $F(t)$ على متذبذب الى المجموع

$$F(t) = \sum_n F_n(t)$$

بحيث ان كلا من المعادلات التفاضليــة التالية

$$m\ddot{x}_n + c\dot{x}_n + kx_n = F_n(t)$$

تســتوفيها الدوال

$$x_n = x_n(t)$$

عندئذ المعادلة التفاضليــة

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) = \sum_n F_n(t) \qquad (٣ـ٨٤)$$

تستوفيها الدالــة

$$x = \sum_n x_n(t) \qquad (٣ ـ ٨٥)$$

ان صحة النظرية المذكورة اعلاه تتبــع مباشــرة من كــون المعادلــــــة التفاضليــة للحركــة خطيــة •

خصوصا عند ما تكون القوة الدافعــة $F(t)$ توافقيــة ترددها الــزاوى ω فان من الممكن تحليلها بســلســلة فورير[٨] • ووفقا لهذه النظرية يمكننــــا تمثيــل $F(t)$ كمجموعــة من حدود الجيب والجيب تمام ، اوبطريقــــة اخرى يمكن ان تكتب كمجموعة اســية مركبــة ، اى

$$F(t) = \sum_n \dot{F}_n e^{in\omega t} (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad (٣ ـ ٨٦)$$

وتعطي المعامل من

$$F_n = \frac{\omega}{2\pi} \int F(t) e^{-in\omega t} \, dt \qquad (٣ ـ ٨٧)$$

حيث غايات التكامل هي $t = -\pi/\omega$ الى $t = +\pi/\omega$ •

كما في البند الســابق ، تعطي الحركــة الحقيقيــة من مجمــوع جزئين ، اى الحد العابــر الذى ســوف نهملــه وحل حالة ــ الاســتقرار •

$$x(t) = A_0 + A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{i2\omega t} + \ldots \qquad (٣ ـ ٨٨)$$

---

(٨) انظر في اى كتاب عن طرق فورير

الحد الاول A_0 ثابت تعتمد قيمته على شكل $F(t)$ • ويساوى صفر لقوة دافعة متناظرة • الحد الثاني يعطي استجابة المتذبذب المدنوع في التردد الاساسي ω • الحد الثالث يمثل الاستجابة للتوافق الثاني 2ω للقوة المسلطة وهلم جرا •

يمكننا استخدام نظرية البند السابق لايجاد السعة A_n بدلالة المعامل F_n لذلك نحصل من المعادلة (٣ـ ٧٤) على

$$A_n = \frac{F_n/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + 4\gamma^2 n^2 \omega^2}} \qquad (٣ـ ٨٩)$$

مما سبق نرى ان حالة الاستقرار النهائية للحركة تكون توافقية • والتوافق الخاص nω الذى يكون الاقرب من تردد الرنين ω_r له اعظم سعة • وبالاخص اذا كان ثابت التضاؤل صغيراً جداً • واذا حدث وان تطابق تردد الرنين مع احد توافقيات القوة الدافعة بحيث لاى قيمة لـ n نحصل على

$$\omega_r = n\omega$$

عندئذ ستسيطر السعة A_n في هذا التوافق بصورة كبيرة وعليه فان محصلة الحركة للمتذبذب ربما تقترب كثيراً من الدالة الجيبية حتى لو سلطت قوة دافعة غير جيبية •

تمــــــارين

٣ـ١) جسيم كتلته m كان مبدأيا في حالة السكون • اثرت عليه قوة ثابتة مقدارها F_o لفترة زمنية t_o. ثم ضوعفت هذه القوة فجأة الى $2F_o$ وبقيت ثابتة لهذه القيمة • جد المسافة الكلية التي يقطعها الجسيم في الزمن $2t_o$ •

٣ـ٢) جسيم كتلته m كان مبدأيا في حالة السكون • سلطت عليه القوة F تزداد تربيعيا مع الزمن $F=ct^2$ جد v و x كدوال للزمن t •

٣ـ٣) جسيم كتلته m كان مبدأيا في حالة السكون في الزمن $t=o$ سلطت عليه قوة متزايدة خطيا $F=ct$ لفترة زمنية مقدارها t_o بعدئذ تناقصت القوة خطيا مع الزمن وانخفضت الى الصفر في الزمن $t=2t_o$ جد المسافة التي يقطعها الجسيم في هذا الزمن •

٣ـ٤) جسيم كتلته m كان مبدأيا في حالة السكون • سلطت عليه قوة ثابتة F_o لزمن t_o ثم ازدادت القوة خطيا مع الزمن فاصبحت $2F_o$ بعد فترة زمنية اضافية مقدارها t_o اثبت ان المسافة الكلية التي يقطعها الجسيم في الزمن الكلي $2t_o$ تساوي

$$\left(\frac{13}{6}\right)\frac{F_o t_o^2}{m}$$

٣ـ٥) تقذف قالب اعلى سطح مائل بانطلاق ابتدائي مقداره v_o • فاذا كان ميل السطح θ ومعامل الاحتكاك الانزلاقي بين السطح والقالب يساوي μ جد الزمن الكلي اللازم للقالب حتى يعود الى نقطة انطلاقه •

٣ـ٦) ينزلق قالب على سطح مستو مزيت بدهن ثقيل بحيث يعاني القالب مقاومة لزوجة تتغير مع الجذر التربيعي للانطلاق

$$F(v) = -cv^{1/2}$$

فاذا كان الانطلاق الابتدائي للقالب في الزمن $t=0$ يســـــاوى v_0
جـد قيم v و x كدوال للزمن t •

٣ ـ٧) اثبت ان القالب في التمرين (٣ ـ٦) لا يمكنـه السـير ابعد مـــن :

$$\frac{2m}{3c} v_0^{3/2}$$

٣ ـ٨) حل التمرين (٣ـ٦) للحالة التي تتغير فيها القوة مع الانطـلاق مرفوعـــا
للقـوة n اى
$$F(v) = -cv^n$$
بين فيما اذا كانت توجـد او لا توجد غاية للموضع لاية قيمة لـ n •

٣ ـ٩) تتغير القوة المسـلطة على جسـيم مع المســافة x وفقا لقانون الاساسـية Power Law . اى

$$F(x) = -kx^n$$

آ ـ جـد دالة الطاقـة الكامنـة
ب ـ اذا كانت $v = v_0$ في الزمن $t = 0$ و $x=0$ جـد v
كدالـة للمســافة x •
جـ ـ جـد نقاط رجـوع الحركـة •

٣ ـ١٠) جسـيم كتلتـه m ترك ليسـقط من السـكون مسـافة b من نقطة اصـــل
تؤثر فيها قوة ثابتـة تجذب الجسـيم وفقا لقانون التربيع العكسـي ••

$$F(x) = -kx^{-2}$$

اثبت ان الزمن اللازم للجسـيم لكي يصل نقطـة الاصل هو

$$\pi \left(\frac{mb^3}{8k} \right)^{1/2}$$

٣ـ١١) جـد العلاقـة بين مسـافة السـقوط و انطلاق جسـيم ترك يسـقط من السـكون تحت تأثير مقاومة الهواء التي تتناسـب مع

آ ـ السـرعة　　　　ب ـ مربع السـرعة

٣ـ١٢) اطلقت قذيفـة شـاقوليا الى الاعلى بانطـلاق ابتدائي v_o . اذا فرضنـا ان مقاومـة الهواء تتناسـب مع مربع الانطلاق اثبت ان انطلاق القذيفة عند عودتهـا وتضـرب الارض

$$\frac{v_o v_t}{(v_o^2 + v_t^2)^{1/2}}$$

حيث

$$v_t = \text{انطلاق المنتهي} = \left(\frac{mg}{c}\right)^{1/2}$$

٣ـ١٣) تتغير سـرعة جسـيم كتلتـه m مع الازاحـة x وفقا للمعادلـة

$$v = \frac{b}{x}$$

جـد القوة التي تؤثر على الجسـم كدالـة لـ x .

٣ ـ١٤) اذا كانت القوة المؤثرة على جسـيم تسـاوى حاصل ضرب دالة المسـافة في دالـة السـرعة $F(x,v) = f(x)\ g(v)$ اثبت ان المعادلة التفاضلية للحركـة يمكن حلها بالتكامل اذا كانت القوة تساوى حاصل ضرب دالـة المسـافة في دالة الزمن . هل يمكن حل معادلة الحركة بالتكامل البسيط؟ هل يمكن حلها اذا كانت القوة تسـاوى حاصل ضرب دالة الزمن فـي دالة السـرعة ؟

٣ ـ١٥) القوة التي تؤثر على جسـيم كتلتـه m هي

$$F = kvx$$

حيث k ثابت فاذا مر الجسـيم في نقطـة الاصل بانطـلاق v_o في الزمن $t = 0$ جد x كدالـة للزمن t .

٣ ـ ١٦) يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة سعتها A و يمر من نقطة الاستقرار بانطلاق v_0 ما هو زمن الذبذبة Period ؟

٣ ـ ١٧) جسيمان كتلتاهما m_1 , m_2 على التوالي ، يتحرك كل منهما حركة توافقية بسيطة سعة الاولى A_1 والثانية A_2 فاذا كانت الطاقة الكلية للجسيم الاول ضعف طاقة الجسيم الثاني ، جد نسبة زمن ذبذبة الاول الى الثاني (T_1/T_2) .

٣ ـ ١٨) يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة فاذا كان انطلاقه v_1 عندما تكون ازاحته x_1 ، v_2 عندما تكون ازاحته x_2 جد مدة الذبذبة والسعة للحركة بدلالة الكميات المذكورة .

٣ ـ ١٩) نابضان مرونتهما k_1, k_2 على التوالي علقا بوضع شاقولي لحمل جسم كتلته m برهن على ان التردد الزاوي للتذبذب هو $\left[\frac{(k_1 + k_2)}{m}\right]^{\frac{1}{2}}$ اذا ربط النابضان على التوازي و $\left[\frac{k_1k_2}{(k_1+k_2)\ m}\right]^{\frac{1}{2}}$ اذا ربطا على التتالي .

٣ ـ ٢٠) نابض مرونته k يحمل صندوقا كتلته M موضوعا فيه قالب كتلته m فاذا سحب الجهاز الى الاسفل من موضع استقراره مسافة d وترك . جد قوة رد الفعل بين القالب و قعر الصندوق كدالة للزمن . ما هي قيمة d التي يبدأ فيها القالب على وشك ان يترك قعر الصندوق عندما يكون في اعلى التذبذب الشاقولي ؟ اهمل مقاومة الهواء .

٣ ـ ٢١) يعرف المعدل الزمني للدالة $f(t)$ بالعلاقة التالية :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt$$

اثبت ان المعدل الزمني (لزمن ذبذبة واحدة) للطاقة الحركية

لمتذبذب توافقي غير متضائل يساوى المعدل الزمني للطاقة الكامنة •

٣ـ٢٢) اثبت ان النسبة بين ازاحتين متتاليتين في النهاية العظمى لمتذبذب توافقي متضائل تكون ثابتة (لاحظ ان النهايات العظمى لا تحدث في نقاط تماس منحني الازاحة مع المنحني $Ae^{-\gamma t}$).

٣ـ٢٣) اذا علمت ان سعة متذبذب توافقي متضائل تهبط الى 1/e من قيمتها الابتدائية بعد مرور n من الاهتزازات الكاملة • اثبت ان نسبة زمن ذبذبته الى زمن ذبذبته بدون تضاؤل هي

$$\frac{T}{T_o} = \left(1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\right)^{1/2} \simeq 1 + \frac{1}{8\pi^2 n^2}$$

٣ـ٢٤) اذا كان انطلاق المنتهي لكرة حرة السقوط هو ٦٦ر٤ متر/ ثا • وعند تعليقها وهي في حالة السكون بوتر مرن خفيف يتمطط مسافة ٦١ر٠ متر • فاذا تركت تتذبذب شاقوليا • جد زمن الذبذبة • افرض القانون الخطي لمقاومة الهواء •

٣ـ٢٥) في المسألة السابقة ، جد عدد الذبذبات عندما تهبط السعة بمقدار واحد بالمائة من السعة الابتدائية •

٣ـ٢٦) جد التردد الطبيعي وتردد الرنين للكرة في التمرين (٣ ـ ٢٤) • جد كذلك معامل النوعية Q للجهاز •

٣ـ٢٧) اثبت ان التردد الدافع ω الذى تكون فيه سعة متذبذب توافقي مدفوع تساوى نصف السعة في تردد الرنين هي تقريبا $\omega_o \pm \gamma\sqrt{3}$.

٣ ـ٢٨) جد التردد الدافع للحالة التي يكون فيها انطلاق متذبذب توافقي اضطرارى اكبر ما يمكن [تلميح ـ خذ النهاية العظمى للكمية

$$v_{max} = \omega A(\omega).]$$

٣ـ٢٩) اثبت ان معامل النوعية Q لمتذبذب توافقي مدفوع يساوى العامل الذى يجب ضربه في الاستجابة لتردد دافع في الصفر للحصول على الاستجابة في تردد الرنين ·

٣ـ٣٠) حل المعادلة التفاضلية لحركة متذبذب توافقي تحت تأثير قوة دافعة توافقية متضائلة من النوع

$$F_{ext} = F_o e^{-bt} \cos(\omega t)$$

٣ـ٣١) برهن ان متسلسلة فورير " للموجة المربعة " التوافقية Periodic Square Wave هي

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \tfrac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \dots\right]$$

حيث

$$f(t) = +1 \quad \text{for } 0 < \omega t < \pi \; ; \; 2\pi < \omega t < 3\pi$$

و هلم جرا

$$f(t) = -1 \quad \text{for } \pi < \omega t < 2\pi \; ; \; 3\pi < \omega t < 4\pi$$

و هلم جرا

٣ـ٣٢) استخدم النتيجة السابقة لايجاد حالة الاستقرار لحركة متذبذب توافقي متضائل اى مدفوع بقوة موجه ـ مربعة توافقية سعتها F_o . وبصورة خاصة ، جد السعات النسبية للحدود الثلاث الاولى A_1 ، A_3 ، A_5 لدالة الاستجابة $x(t)$ في الحالة التي يتطابق فيها التوافقي الثالث 3ω للتردد الدافع مع تردد رنين التذبذب ، افرض ان معامل النوعية $Q = 100$ ·

الفصل الرابـــــع
ديناميك الجسيم ـ الحركة بصورة عامـــــــة
Dynamics of a Particle-General Motion

الان نحول انتباهنا الى الحالة العامة لحركة جسيم في الفضاء • رأينـا قبـــل قليل ان الصيغة الاتجاهية لمعادلة حركة الجسيم هي ـ

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

او مايكانئ ذلك

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \qquad (٤ـ١)$$

هذه بالحقيقة تمثل اختصارا للمعادلات التركيبية الثلاث التالية ـ

$$F_x = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) \qquad F_z = \frac{d}{dt}(m\dot{z}) \qquad F_y = \frac{d}{dt}(m\dot{y})$$

حيث مركبات القوى F_z ، F_y ، F_x قد تتضمن الاحداثيات ومشتقاتها بالنسبة للزمـــن والزمن • ان من المؤسف حقا ، ان لاتوجد طريقة عامة لايجاد حلول تحليلية لجميــــع الحالات الممكنة • ولكن هناك انواع خاصة عديدة لدوال قوى ذات اهمية فيزيائية يمكـــن التصدى لمعادلاتها التفاضلية بطرق بسيطة نسبيا • وسندرس بعضا منها في البنـــود التالية ـ

(٤ـ١) قاعدة الشغل The Work Principle

لنضرب طرفي المعادلة العامة للحركة عدديا بالسرعة $\vec{v}$ ، اى

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}\cdot\vec{v} \qquad (٤ـ٢)$$

والان من قوانين التفاضل للضرب العددى نعلم ان

$$\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt} = \frac{2\vec{v}\cdot d\vec{v}}{dt}$$

لذلك اذا فرضنا ان الكتلة m ثابتة ، نرى المعادلة المذكورة توا تكافئ

$$\vec{F}.\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\, m\vec{v}.\vec{v}\right) = \frac{dT}{dt} \qquad (٤ـ٣)$$

حيث ادخلنا ، $T = \frac{1}{2}mv^2$ ، الطاقة الحركية . ولما كان $\vec{v}dt=d\vec{r}$ فيمكننا التكامل لنحصل على

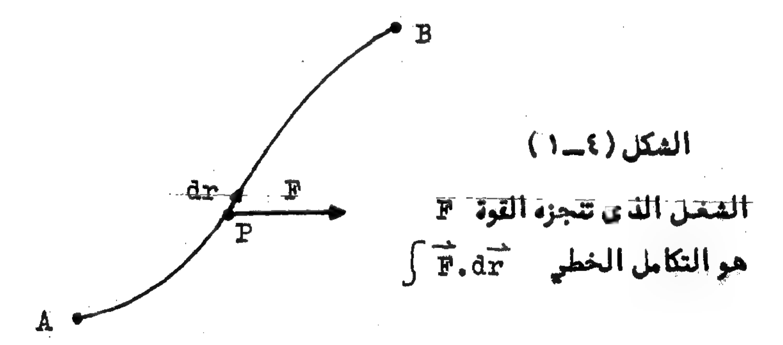
$$\int \vec{F}.d\vec{r} = \int dT \qquad (٤ـ٤)$$

الطرف الايسر لهذه المعادلة ، هو تكامل خطي وهو يمثل الشغل المنجز على الجسيم من تأثير القوة F خلال حركته على طول مسار الحركة . ويمثل الطرف الايمن محصلة التغير في الطاقة الحركية للجسيم . فالمعادلة تنص اذن ، على ان الشغل المنجز على جسيم يساوي الزيادة في الطاقة الحركية .

(٤ـ٢) القوى المحافظة ومجالات القوة

Conservative Forces and Force Fields

ان مقدار التكامل الخطي ، الشغل في هذه الحالة ، يعتمد بصورة عامة على مسار التكامل ، لاحظ الشكل (٤ـ١) . وبعبارة اخرى يعتمد الشغل المنجز اعتياديا على الطريق الخاص الذي يسلكه الجسيم في ذهابه من نقطة الى اخرى .



الشكل (٤ـ١)

الشغل الذي تنجزه القوة F هو التكامل الخطي $\int \vec{F}.d\vec{r}$

اى لو طلب منا حساب قيمة تكامل الشغل فسنحتاج قبل كل شيء الى معرفـــة مسار حركة الجسيم• ومن ناحية اخرى، الانواع الاعتيادية للمسائل التي لها اهمية في ديناميك الجسيم هي التي يكون مسار حركتها مجهولا منذ البداية ، اى ان المسار هو احد الاشياء التي يجب حسابها • عندئذ ، يظهر ان قاعدة الشغل المبينـــة فـــي المعادلة (٤ـ٤) ربما لاتكون مفيدة جدا لاغراضنا • ولكن ظهر ان قاعـدة الشـــغل مفيدة جدا في دراسة حركة الجسيم تحت تاثير نوع خاص من القوى والتي تعرف بالقوى المحافظة• Conservative Forces ولحسن الحظ هناك عدد كبير من القـوى الفيزيائية المهمة هي قوى محافظة•

عندما تكون القوة $\vec{F}$ دالة لاحداثيات الموضع فقط يقال عنها بانها تعـّـرف مجال قوة استاتيكي Static Force Field • ضمن انواع المجالات الممكنة، يوجـد صنف مهم فيــه تكامل الشغل $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ لايعتمد على مسار التكامل• ان مجالات قـوى كهذه تكون محافظة رياضيا • المجال المحافظ هو الذى يكون فيه $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ تفاضلا دقيقا Exact differential• عندما يتحرك جسيم في مجال محافظ فتكامل الشغل ومن ثم الزيادة في الطاقة الحركية يمكن معرفتها مقدما • وهذه المعلومات يمكن استخدامهـــا للتكهن عن حركة الجسيم •

(٤ـ٣) دالـة الطاقــة الكامنـة ـ Potential Energy Function

عند استخدام الاحداثيات الديكارتيه ، يمكن التعبير عن تكامل الشغل على النحو التالي:

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \qquad (٤ـ٥)$$

لنفرض ان من الممكن ايجاد مركبات القوة بتفاضل داله عدديه معينة مثل $V(x,y,z)$ بالطريقة التالية

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (٤ـ٦)$$

الدالة V التي عرّفت بهذه الطريقة تسمى بدالة الطاقة الكامنة ، كما في حالة البعد الواحد حيث $F(x) = -\frac{dV}{dx}$. اذا تواجدت داله طاقة كامنة، عندئذ يمكننا كتابة

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \left(-\frac{\partial V}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial y}dy - \frac{\partial V}{\partial z}d.\right) = -\int dV \quad \ldots\ldots \quad (٤ـ٧)$$

وتصبح قاعدة الشغل ببساطة

$$\int dT = -\int dV \qquad (٤ـ٨)$$

وهذا يدل بوضوح على ان T , $-V$ يختلف في الغالب احدهما عن الآخر بكمية ثابتة.

ولنمثل هذا الثابت بالرمز E عندئذ $T-(-V) = E$ او $T + V = E$

ونسمي E الطاقة الكلية ، ونكتبها بصورة واضحة كالآتي ـ

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + V(x, y, z) = E \qquad (٤ـ٩)$$

وهذه تعني ـ عندما يتحرك جسيم في مجال محافظ للقوة فان مجموع الطاقة الحركية والكامنة يبقى ثابتا خلال الحركة .

الطاقة الكامنة لمجال جاذبية منتظم

لنعتبر حركة جسيم في مجال قوة منتظم ، كحركة جسيم تحت تاثير الجاذبية قرب سطح الارض. اذا اخترنا المحور ـ z شاقوليا ، عندئذ مقدار القوة يكون mg وبالاتجاه السالب لمحور ـ z . اذن يجب ان تحقق داله الجهد المعادلات التالية ـ

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \qquad (٤ـ١٠)$$

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -mg$$

من الواضح ان الدالة التالية تحقق المعادلات المذكورة اعلاه •

$$V(x, y, z) = mgz + C \qquad (٤_١١)$$

حيث C يمثل ثابت التكامل وهو اعتباطي بكل ماني الكلمة من معنى • وقيمته تعين بسهولة • اختيار مستوى المرجع الذى يجب ان تقاس منه الطاقة الكامنة• هـذه الاعتباطية في اختيار الثابت لدالة الجهد هي خاصية عامة لجميع دوال الجهد• والطاقة الكامنة ليست كمية مطلقة وانما تعرّف دائما بالنسبة الى مرجع اعتباطي • لنختر لهـذه الحالة الثابت C مساويا الى الصفر• وهذا يعني ان الطاقة الكامنة تعرّف بحيث يكون سطح الارض مرجعا للمستوى الصفرى• عندئذ تصبح معادلة الطاقة —

$$\tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz = E \qquad (٤_١٢)$$

وتحسب قيمة الطاقة الكلية E لاية حالة تعطى • من الشروط الابتدائية للحركـة •

جهـد قانـون التربيـع العكسي لقـوة

في حالة مجال جاذبية الارض • نعلم ان القوة تتغير عكسيا مع مربع المسافة • مقاسة من مركـز الارض• وقد وجد كذلك بأن علاقة التربيع العكسي هذه • هي قانون قـوة المجالات الكهربائية للجسيمات البدائية Elementary particles • وهذه القـوى من الانواع الاساسية التي تحدث في الطبيعة•

ويمكن كتابـة قانون التربيع العكسي بصيغتـه التحليليه على النحو التالي

$$\vec{F} = -k\frac{\hat{n}}{r^2} \qquad (٤_١٣)$$

حيث $\hat{n}$ تمثل الوحدة المتجهة باتجاه متجه الموضع r و k يمثل ثابت التناسـب • اما الاشارة السالبة فتعني ان القوة هي تجاذبية او متجهة نحو نقطة الاصـل (والاشارة الموجبـة ستعني قوة تنافرية اتجاهها مبتعدا عن نقطة الاصل)والان يمكن تمثيل الوحدة المتجهة $\hat{n}$ بالنسبة بين متجـه الموضع $\vec{r}$ ومقداره r • اى

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

اذن يمكن كتابة قانون التربيع العكسي للقوة ايضا على النحو التالي ـ

$$\vec{F} = -k\,\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (٤ـ١٤)$$

فاذا استخدمنا الاحداثيات الديكارتية ، عندئذ $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ و

$\vec{r} = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ وعليه نحصل على ـ

$$\vec{F} = -k\,(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \qquad (٤ـ١٥)$$

لقانون التربيع العكسي بدلالة الاحداثيات الديكارتيه .

سبق وان استنبطنا في البند (٣ـ ٨) مسألة البعد الواحد لقانون التربيع العكسي للقوة . حيث رأينا ان الدالة $V(r) = -\frac{k}{r}$ تعطي القوة الصحيحة ، اى $F(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{k}{r^2}$. وقد ظهر ان نفس الدالة تعطي القوة الصحيحة للحالة ذات الابعاد الثلاثة . لذلك لو اخذنا ـ $V(x,y,z) = -k(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$

عندئذ

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -kx\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -ky\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -kz\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

هذه تماما مركبات القوة اللازمة لكي تعطي دالة القوة لمعادلة (٤ـ ١٥) .

(٤ـ٤) شروط تواجد دالة الجهد ـ موثر دلتا

Conditions for the Existance of a potential Function-The Del Operator.

رأينا في الفصل الثالث ان الحركة في خط مستقيم لجسيم تكون دائما محافظة ، اذا كانت القوة دالة للموضع فقط . بالطبع قد يسأل السائل الان اذا كان هذا يصح للحالة العامة للحركة ذات البعدين والثلاثة ابعاد ام لا ؟ اى اذا كانت القوة المسلطة على جسيم دالة لاحداثيات الموضع فقط فهل تتواجد دالة شغل V

تحقق دائما المعادلة (٤ـ٦) المذكورة اعلاه• والجواب على هذا السؤال هو لا ، ان دالة الجهد تتواجد فقط في الحالة التي تحقق فيها مركبات القوى

$$F_x = F_x(x, y, z)$$
$$F_y = F_y(x, y, z)$$
$$F_z = F_z(x, y, z)$$

معيارا خاصا •

لنفرض ان دالة الجهد متواجدة ، اى ، ان المعادلات (٤ـ ٦) تصح • عندئذ ، اذا فاضلنا F_x جزئيا بالنسبة للمحور y و F_y جزئيا بالنسبة للمحور x فاننا نحصل على

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$$

ولكن $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$ لان ترتيب المفاضلة غير مهم (على فرض ان الدالة V مستمرة وكذلك مشتقتها الاولى والثانية) • وبالتماثل يمكن الحصول من الزوجين (F_x, F_z) و (F_y, F_z) على مايلي —

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \qquad (٤ـ١٦)$$
$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

هذه هي الشروط الضرورية عندئذ لـ F_x, F_y, F_z لكي تتواجد دالة للجهد وهي تعبر عن الشرط الذى يكون فيه — $\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ دقيق التفاضل Exact Differential [1] كذلك يمكننا ان نثبت بانها شروط كافية اى اذا صحت المعادلات (٤ـ١٦) ، فان مركبات القوة هي فعلا مشتقة من دالة الجهد $V(x, y, z)$ ، ويكون مجموع الطاقة الحركية والطاقة الكامنة ثابتاً •

---

(١) انظر في كتاب متقدم في التفاضل مثل

A.E. Taylor, Advanced Calculus, Ginn, Boston, 1955.

المـــــؤثـــر "دلتـــا" The Del Operator

اذا كان مجال القوة محافظا بحيث اعطيت المركبات بالمشتقات الجزئيـة لدالـــــة الطاقة الكامنة ، عندئذ يمكننا تمثيل $\vec{F}$ بجبر المتجهات على النحو التالـــــي

$$\vec{F} = -\hat{i}\,\frac{\partial V}{\partial x} - \hat{j}\,\frac{\partial V}{\partial y} - \hat{k}\,\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (٤\text{–}١٧)$$

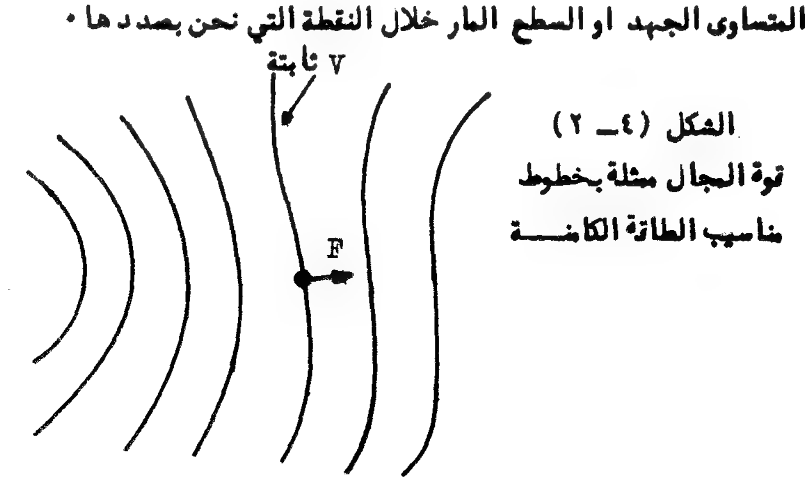
ويمكننا كتابة هذه المعادلة بطريقة ملائمة ومختصرة كالاتي

$$\vec{F} = -\nabla V \qquad (٤\text{–}١٨)$$

هنا ادخلنا المؤثر لمفاضلة المتجـه وهو

$$\nabla = \hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

ويسمى بمؤثر دلتا Del Operator ويسمى التمثيل ∇V بمنحـــــــدر V " gradient V " ويكتب بعض الاحيان على النحو grad V . اما مـــن الناحية الرياضية ، فمنحدر الدالة كمية متجهة تمثل التفاضل الفراغــي Spatial للدالة في المقدار والاتجاه. من الناحية الفيزيائية ، فان المنحدر السالب لدالـــة الطاقة الكامنة يعطي اتجاه ومقدار القوة التي تؤثر على جسيم موضوع في مجال كونتـــه جسيمات اخرى . وتعني الاشارة السالبة ان الجسيم اجبر على الحركة باتجاه تناقص الطاقة الكامنة بدلا من الاتجاه المعاكس . الشكل (٤ــ٢) يمثل توضيحا للمنحــــدر . حيث رسمت دالة الجهد على شكل خطوط مناسيب Contour Lines وكل منهـــا تمثل منحني لطاقة كامنة ثابتة . والقوة في اية نقطة تكون دائما عمودية على المنحنـــي المتساوي الجهد او السطح المار خلال النقطة التي نحن بصدد ها .



الشكل (٤ــ٢)
قوة المجال ممثلة بخطوط مناسيب الطاقة الكامنـــة

يستخدم موءثر دلتا كمعيار ملائم لمعرفة ما اذا كانت قوة المجال محافظة ام لا • نستخدم لهذا التطبيق الضرب الاتجاهي لموءثر دلتا اى

$$\nabla \times \vec{F} = \hat{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \qquad (٤ــ٢٠)$$

ان الضرب الاتجاهي كما عرّف اعلاه يسمى بدوران ــ F ، "(Curl F)" • ونرى وفقا للمعادلات (٤ــ١٠) ان كلا من مركبات k, j, i في دوران ــ F يتلاشى اذا كانت القوة F محافظة • وهكذا يمكن كتابة الشرط اللازم بشكله المحكم التالي لكي تكون القوة محافظة •

$$\nabla \times \vec{F} = 0 \qquad (٤ــ٢١)$$

رياضيا ، تمثل المعادلة المذكورة اعلاه الشرط الضروري والكافي لكي يكون الحد $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ تفاضلي دقيق او بعبارة اخرى لايعتمد التكامل $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ على مساره • اما من الناحية الفيزيائية ، فيعني تلاشي دوران ــ F ، ان الشغل الذى تقوم به القوة F لتحريك جسيم لا يعتمد على مسار الجسيم في ذهابه من نقطة معينة الى اخرى •

هناك علاقة جبرية ثالثة تحتوى على موءثر دلتا ، نعني الضرب العددى $\nabla \cdot \vec{F}$ • وهذا يسمى بمتفرقة ــ $\vec{F}$ (divergence of F) • ففي حالة قوة المجال تمثل المتفرقة مقياس كثافة المجال في نقطة معينة • وللمتفرقة اهمية خاصة في نظرية الكهربائية والمغناطيسية •

امثلة

١ــ جد قوة المجال لدالة الجهد $V = x^2 + yx + xz$ عند استخدام موءثر دلتا نحصل على

$$\vec{F} = -\nabla V = -\hat{i}\,(2x+y+z) - \hat{j}x - \hat{k}x$$

٢ــ هل قوة المجال $\vec{F} = \hat{i}xy + \hat{j}xz + \hat{k}yz$ محافظة ؟

بأخذ دوران ــ $\vec{F}$ نحصل على

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & xz & yz \end{vmatrix} = \hat{i}(z-x)+\hat{j}0+\hat{k}(z-x)$$

ولما كانت النتيجة لاتساوى صفرا فالمجال اذ ن غير محافظ

٣ــ ما قيم الثوابت c, b, a التي تكون فيها القوة $\vec{F}=\hat{i}(ax+by^2) + \hat{j}cxy$ محافظة ٠

باخذ دوران ــ F نحصل على

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ax+by^2 & cxy & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(c - 2b)\ y$$

تبين هذه النتيجة ان القوة محافظة ، شريطة ان يكون $c=2b$. قيمة a لا اهمية لها ٠

(٤ــ٥) القوى من النوع القابل للفرز٠ Forces of the Separable Type

في حالات كثيرة يمكن اختيار محاور بحيث تكون مركبات قوة المجال دوال لاحداثياتها فقط اى ــ

$$\vec{F} = \hat{i}F_x(x) + \hat{j}F_y(y) + \hat{k}F_z(z) \qquad (٤ ــ ٢٢)$$

هذا النوع من القوى تسمى قابلة الفرز Separable سبق وان برهنا بسهولة ان دوران قوة كهذه يساوى صفرا ولهذا السبب يكون مجالها محافظا بصرف النظر عن الاشكال الخاصة لمركبات القوة مادامت كل منها دالة فقط ــ للاحداثي المستخدم٠ عندئذ يكون تكامل المعادلات التفاضلية للحركة بسيطا جداً ٠ لان معادلة كل مركبة تكون من نوع $m\ddot{x}=F(x)$. في هذه الحالة يمكن حل المعادلات بالطرق التي وصفت في الفصل السابق تحت عنوان الحركة في خط مستقيم ٠

سنبحث في البنود القادمة بعض امثلة القوى قابلة الفرز المحافظة منها وغير المحافظة •

(٤ـ٦) حركة القذيفة في مجال تثاقلي منتظم

Motion of a Projectile in a Uniform Gravitational Field

تعتبر حركة القذيفة من المسائل التقليدية المشهورة في ديناميك الجسيم • سوف ندرس هذه المسألة بالتفصيل لانها توضح القواعد العامة التي اوردناها في البنود السابقة •

اهمال مقاومة الهواء

للسهولة ، لنفرض اولا الحالة التي تتحرك فيها القذيفة عندما تهمل مقاومة الهواء في هذه الحالة المثالية توجد قوة موثرة واحدة فقط ، هي قوة جذب الارض • وعند اختيار محور ـ z شاقوليا تكون المعادلة التفاضلية للحركة على النحو التالي ـ

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = - mg\hat{k}$$

علاوة على ذلك لجعل المسألة اكثر مثاليةً نفرض ان التعجيل الارضي ثابت • من الواضح عندئذ أن دالة القوة تكون من النوع القابل الفرز والمحافظ ايضا لانها تمثل حالة خاصة من معادلة (٤ـ٢٢) • سبق وان استنبطت معادلة الطاقة في البند (٤ـ٣) سوف نعمد الى تخصيص المسألة اكثر وذلك باختيار الانطلاق الابتدائي مساويا الى v_0 والموضع الابتدائي في نقطة الاصل عندما يكون الزمن $t = 0$ • عندئذ معادلة الطاقة

$$\tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz = \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

او

$$v^2 = v_0^2 - 2gz$$

تعطي الانطلاق كدالة للارتفاع • هذه جميع المعلومات التي يمكننا الحصول عليها مباشرة من معادلة الطاقة •

لكي نتابع الموضوع اكثر ، يجب ان نعود الى المعادلة التفاضلية للحركة • التي يمكن كتابتها على النحو التالي

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = -g\hat{k}$$

وهذه من نفس صيغة تلك التي بحثت في البند (٢ـ١٠) • ويمكن تكاملها مباشرة • فبتكاملها مرة واحدة نحصل على السرعة ، اى

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -gt\hat{k} + \vec{v}_0$$

حيث ثابت التكامل v_0 يمثل السرعة الابتدائية • وبتكاملها للمرة الثانية نحصل على موضع المتجه ، اى

$$r = \frac{-1}{2}gt^2\hat{k} + v_0 t$$

في هذه الحالة يساوى ثابت التكامل r_0 صفرا ، لان الموضع الابتدائي للقذيفة اخذ في نقطة الاصل • وتصبح المعادلة المذكورة اعلاه بدلالة المركبات على النحو التالي ــ

$$x = \dot{x}_0 t$$
$$y = \dot{y}_0 t \qquad (٤ـ٢٣)$$
$$z = \dot{z}_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

هنا $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ تمثل مركبات السرعة الابتدائية $\vec{v}_0$ • قمنا اذن بحل مسألة حساب موضع القذيفة كدالة للزمن •

اما بالنسبة لمسار القذيفة ، نلاحظ عند حذف t من معادلتي x و y ان النتيجة تكون $y = bx$

حيث b ثابت ويساوى $b = \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}$

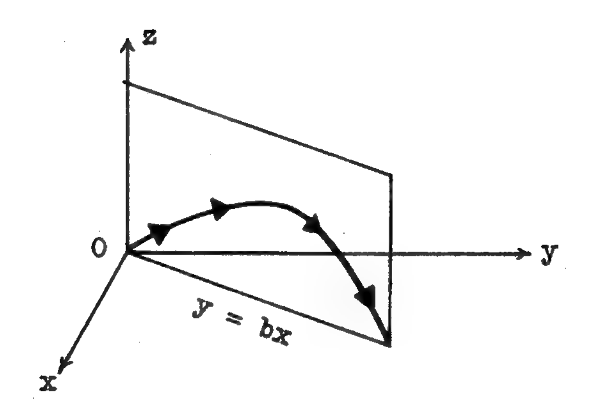
لذلك يقع المسار كليا في مستوى وبصورة خاصة ، اذا كان $\dot{y}_0 = 0$ ، عندئذ يقع المسار في المستوى ــ xz • بعد ذلك ، اذا حذفنا t من معادلتي x, z تكون معادلة المسار على الشكل التالي ــ

$$z = \alpha x - \beta x^2$$

حيث

$$\alpha = \frac{\dot{z}_0}{\dot{x}_0} \quad , \quad \beta = \frac{g}{2\dot{x}_0^2}$$

اذن المسار قطع مكافيء يقع في المستوى $y=bx$. كما هو مبين في الشكل (٤ ــ ٣) •



الشكل (٤-٣) مسار قذيفة متحركة
في ثلاثة ابعاد

مقاومة الهواء الخطية

لنفرض الان حركة القذيفة في الحالة الاكثر واقعية والتي تكون فيها القوة المعيقة ناشئة عن مقاومة الهواء . في هذه الحالة تكون الحركة غير محافظة . وتتناقص الطاقة الكلية بصورة مستمرة كنتيجة للخسران بسبب الاحتكاك .

وللسهولة ، نفرض ان قانون مقاومة الاحتكاك خطي بحيث تتغير قوة المقاومة طردياً مع السرعة $\vec{v}$. سيكون من الملائم كتابة ثابت التناسب على الشكل $m\gamma$ حيث m تمثل كتلة القذيفة . فهناك اذن قوتان تؤثران على القذيفة ، هما مقاومة الهواء $-m\gamma\vec{v}$ والقوة التثاقلية والتي كما في السابق تساوي $-mg\hat{k}$ ، عندئذ المعادلة التفاضلية تصبح

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\gamma\vec{v} - mg\hat{k}$$

وباختصار m من كل حد ، نحصل على

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\gamma\vec{v} - g\hat{k}$$

ويتم تكامل المعادلة المذكورة اعلاه بسهولة عند كتابتها بدلالة مركباتها .

اى

$$\ddot{x} = -\gamma \dot{x}$$
$$\ddot{y} = -\gamma \dot{y}$$
$$\ddot{z} = -\gamma \dot{z} - g$$

نلاحظ ان هذه المعادلات قد فرزت الآن • اذن يمكن حل كل منها بصورة منفـــردة باساليب الفصل السابق • وباستخدام نتائجنا من البند (٣ـ٧) نستطيع كتابة الحلول مباشرة والتي

$$\dot{x} = \dot{x}_0 e^{-\gamma t}$$
$$\dot{y} = \dot{y}_0 e^{-\gamma t} \qquad (٤ـ٢٤)$$
$$\dot{z} = \dot{z}_0 e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})$$

لاحداثيات السرعة و

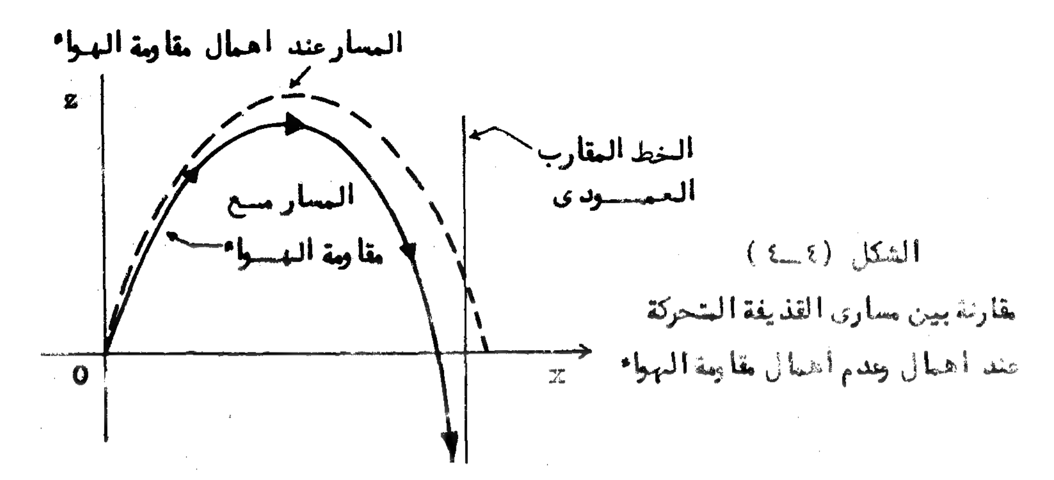
$$x = \frac{\dot{x}_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})$$
$$y = \frac{\dot{y}_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) \qquad (٤ـ٢٥)$$
$$z = \left(\frac{\dot{z}_0}{\gamma} + \frac{g}{\gamma^2}\right)(1 - e^{-\gamma t}) - \frac{g}{\gamma} t$$

لاحداثيات الموضع • هنا كالسابق • مركبات السرعة الابتدائية هـــــــــــــــي $\dot{x}_0$ ، $\dot{y}_0$ ، $\dot{z}_0$ وقد اخذ موضع القذيفة الابتدائي في نقطة الاصـــــــــل • كالحالة التي اهملت فيها مقاومة الهواء • تبقى الحركة كليا في المســـــــتوى $y = bx$ حيث $b = \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}$ • والمسار في هذا المستوى ليس قطعـــا مكافئـــــا • وانما منحن يقع اسفل المسار المكافيء • كما هو مبين في الشكل (٤ـ٤) •

ان فحص معادلتي x و y يرينا ان x و y يقتربان من الغاية عندما تكون t كبيرة اى

$$x \longrightarrow \frac{\dot{x}_0}{\gamma}$$
$$y \longrightarrow \frac{\dot{y}_0}{\gamma}$$

وهــذا يعنــي ان للمســـار الكامل خط مقارب عمودى كما هو مبيــن في الشـــكل •



الشكل (٤ـ٤)
مقارنة بين مساري القذيفة المتحركة عند اهمال وعدم اهمال مقاومة الهواء

تمثل المعادلة (٤ـ٢٥) الحل النهائي لحركة القذيفة عندما تعتبر مقاومة الهواء خطية ، والتي يمكن كتابتها بجبر المتجهات بالطريقة التالية

$$\vec{r} = \left(\frac{\vec{v}_o}{\gamma} + \frac{\hat{k}g}{\gamma^2}\right)\left(1 - e^{-\gamma t}\right) - \hat{k}\,\frac{gt}{\gamma} \qquad (٤ـ٢٦)$$

اى ان حل المعادلة التفاضلية الاتجاهية للحركة يمكن تحقيقه بالتفاضل بسهولة .

من المهم اعتبار الحالة التي تكون فيها مقاومة الهواء صغيرة جدا ، اى عندما يكون مقدار الكمية γt في الدالة الاسية اصغر بكثير من واحد . ولهذا الغرض سوف تستخدم المتسلسلة الاسية التالية

$$e^{u} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots\cdots$$

والتي عندما نعوض فيها $u = -\gamma t$. تصبح النتيجة ، بعد الاختصار وتجميع الحدود كما يلي

$$\vec{r} = \vec{v}_o t - \tfrac{1}{2} g t^2 \hat{k} - \Delta\vec{r} \qquad (٤ـ٢٧)$$

حيث

$$\Delta\vec{r} = \gamma\left[\vec{v}_o\left(\frac{t^2}{2!} - \frac{\gamma t^3}{3!} + \cdots\right) + \hat{k}g\left(\frac{t^3}{3!} - \frac{\gamma t^4}{4!} + \cdots\right)\right] \qquad (٤ـ٢٨)$$

يمكن اعتبار الكمية $\Delta\vec{r}$ كتصحيح لمسار القذيفة الذى اهملت فيه المقاومة ليعطي المسار الحقيقي .

في الحركة الفعلية للقذيفة خلال الجو ، لايكون قانون المقاومة خطيا ، ولكنه دالة معقدة جدا للسرعة .ويمكن حساب المسار بصورة دقيقة بطريقة التكامل العددي ومساعدة الحاسبات عالية الانطلاق .

(٤ـ٧) المتذبذب التوافقي في البعدين والثلاثة ابعاد .

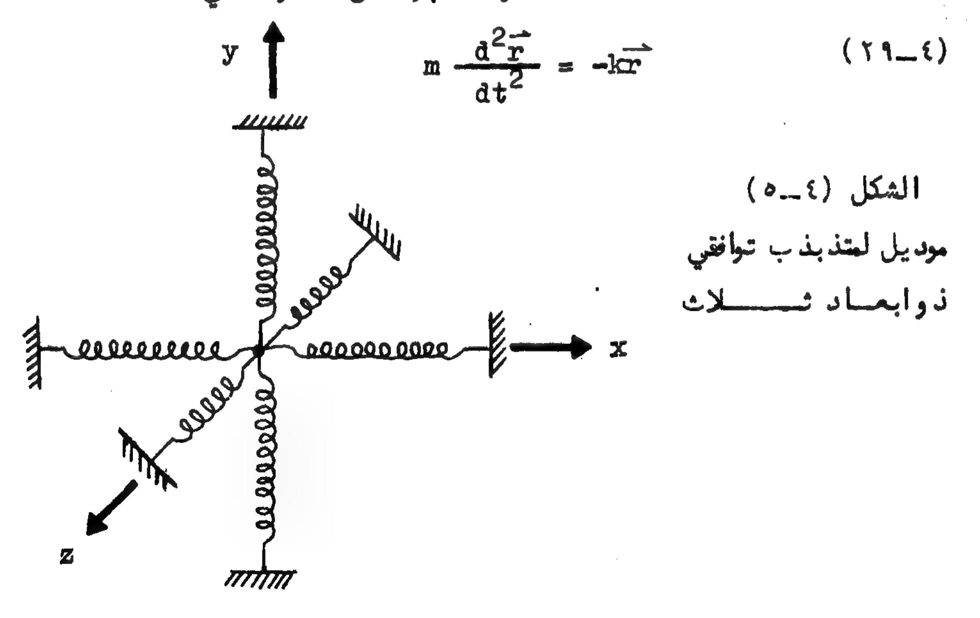
The Harmonic Oscillator in two and three Dimensions

سنفترض في هذا البند حركة جسيم تؤثر عليه قوة معيدة خطية تتجه دائما نحو نقطة ثابتة ، نقطة الاصل في نظام احداثياتنا . قوة كهذه يمكن تمثيلها بالعلاقة التالية

$$\vec{F} = -k\vec{r}$$

عندئذ يمكن كتابة المعادلة التفاضلية للحركة بسهولة على النحو التالي

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r} \qquad (٤ـ٢٩)$$



الشكل (٤ـ٥)
موديل لمتذبذب توافقي ذو ابعاد ثلاث

ويمكن تمثيل هذه الحالة ، على وجه التقريب ، بجسيم مربوط بمجموعة من النوابض المرنة ، كما هو مبين في الشكل (٤ـ٥)

المتذبذب ذو البعدين

لحالة الحركة في سطح مستو ، المعادلة التفاضلية المذكورة اعلاه تكافئ المعادلتين المفروزتين التاليتين

$$m\ddot{x} = -kx$$
$$m\ddot{y} = -ky$$

وكل من هاتين المعادلتين تماثل معادلة المتذبذب التوافقي في خط مستقيم والذى درسناه في البند (٢ـ٢ أ) . لذلك يمكننا كتابة الحلول مباشرة على النحو التالي

$$x = A\cos(\omega t + \alpha)$$
$$y = B\cos(\omega t + \beta) \qquad (٤ـ٣٠)$$

حيث

$$\omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

وتحسب ثوابت التكامل A ، B ، α ، β لاية حالة معينة من الشروط الابتدائية .

لايجاد معادلة المسار ، نحذف الزمن t من المعادلتين . ويكون ذلك بكتابة المعادلة الثانية على النحو التالي

$$y = B\cos(\omega t + \alpha + \Delta)$$

حيث

$$\Delta = \beta - \alpha$$

عندئذ

$$y = B\left[\cos(\omega t + \alpha)\cos\Delta - \sin(\omega t + \alpha)\sin\Delta\right]$$

ونحصل من اولى معادلتي (٤ـ٣٠) على

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cos\Delta - \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\Delta$$

وبنقل الحدود وتربيع طرفي المعادلتين الاخريين نحصل على

$$\frac{x^2}{A^2} - xy\,\frac{2\cos\Delta}{AB} + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\Delta \qquad (٤-٢١)$$

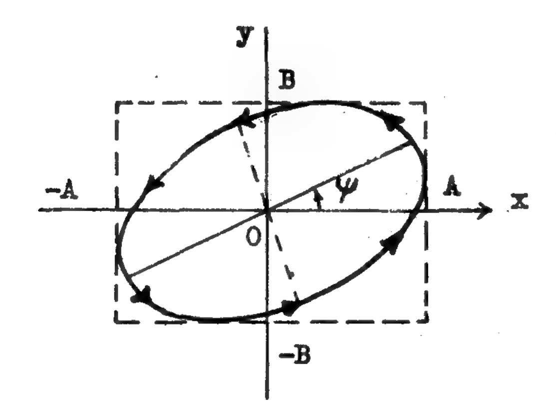
هذه المعادلة من الدرجة الثانية في x و y . والان ، المعادلة العامة من الدرجة الثانية

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$$

تمثل قطعاً ناقصاً ، قطعاً مكافئاً اوقطعاً زائداً . ويعتمد ذلك على كون المميز

$$b^2 - 4ac$$

سالبا ، صفرا ، او موجبا على التتالي . في الحالة التي نحن بصددها المميز يساوي $\left(\frac{2\sin\Delta}{AB}\right)^2$ ـ اى انه كمية سالبة ، لذلك يكون المسار قطعا ناقصا كما هو مبين في الشكل (٤ـ٦)



الشكل (٤ ـ ٦)

مسار قطع ناقص لحركة متذبذب توافقي في بعدين

في الحالة الخاصة ، عندما يكون فرق الطور Δ يساوى $\pi/2$ ، عندئذ تختصر معادلة المسار الى المعادلة التالية

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

وهذه معادلة قطع ناقص محاوره منطبقة على محاور الاحداثيات ٠ اما اذا كان فرق الطور صفرا او π فمعادلة المسار تصبح خطاً مستقيماً ، اى

$$y = \pm \frac{B}{A} x$$

وتؤخذ بنظر الاعتبار الاشارة الموجبة عندما تكون $\Delta = 0$ ، والسالبة عندما تكون $\Delta = \pi$ ٠ يمكننا البرهنة للحالة العامة ، ان محاور مسار القطع الناقص تميل بزاوية ψ مع المحور ـ x حيث

$$\tan 2\psi = \frac{2AB \cos\Delta}{A^2 - B^2} \qquad (٤ ـ ٣٢)$$

وقد ترك استنباط هذه العلاقة كتمرين للطالب ٠

المتذبذب التوافقي ذو الابعاد الثلاثة

في حالة الحركة في ثلاثة ابعاد ، المعادلة التفاضلية للحركة تكافيء المعادلات المفروزة الثلاث التالية

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$m\ddot{y} = -ky$$

$$m\ddot{z} = -kz \qquad (٤ ـ ٣٣)$$

فحلولها تكون اذن

$$x = A \cos(\omega t + \alpha)$$

$$y = B \cos(\omega t + \beta) \qquad (٤ ـ ٣٤)$$

$$z = C \cos(\omega t + \gamma)$$

او ، قد تكتب بطريقة اخرى هي

$$x = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t$$
$$y = A_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t \qquad (٤ _ ٣٥)$$
$$z = A_3 \sin \omega t + B_3 \cos \omega t$$

وتحسب ثوابت التكامل الستة في كل من المجموعتين من موضع وسرعة الجسيم الابتدائيتين. الان افرض المعادلة الاولى والثانية من مجموعة المعادلات (٤ـ٣٥) . منهما نستطيع ان نجد $\sin \omega t$ و $\cos \omega t$ بدلالة x و y والثوابت A_1، B_1، A_2، B_2

وعند تعويض النواتج في المعادلة الثالثة نحصل على معادلة من النوع $z = ax + by$

حيث الثوابت a، b تحسب من مجموعة ثوابت $A's$ وثوابت $B's$ مسار الحركة يقع اذن في مستو يمر من نقطة الاصل . المسار في هذه الحالة يكون قطعا ناقصا ايضا " (كما هي الحالة في الحركة ذات البعدين) . يمكن روئية ذلك من المناقشة التالية . اذا حولنا معادلات الحركة الى محاور جديدة مثل x'، y'، z' والتي لها نفس نقطة اصل المحاور القديمة ودورت بحيث انطبق المستوى $x'y'$ على مستوى الحركة . عندئذ سوف لايتغير شكل المعادلات التفاضلية للحركة بدلالة الاحداثيات الجديدة اى

$$m\ddot{x}' = -kx'$$
$$m\ddot{y}' = -ky'$$

مع

$$z' = 0$$

اذن ، للمسار نفس شكل مسار الحركة ذات البعدين ، اى قطع ناقص في المستوى $x'y'$. بطبيعة الحال ، يعتمد دوران مستوى الحركة على السرعة الابتدائية والموضع الابتدائي للجسيم .

تمثل المعادلات (٤ـ٣٣) وحلولها ، حركة مايسمى بالمتذبذب المتجانس

isotropic oscillator ذى الابعاد الثلاثة ، وفيه لاتعتمد القوة المعيدة على اتجاه الازاحة . اما اذا اعتمدت القوة المعيدة على اتجاه الازاحة ، فنحصل على حالة التذبذب غير المتجانس . يمكن كتابة المعادلات التفاضلية لحالة التذبذب غير المتجانس وذلك باختيار محاور ملائمة على النحو التالى

$$m\ddot{x} = -k_1x$$
$$m\ddot{y} = -k_2y \qquad (٤ - ٣٦)$$
$$m\ddot{z} = -k_3z$$

هنا عندنا حالة ثلاثة ترددات مختلفة للتذبذب هي $\omega_1 = \sqrt{k_1/m}$ ، $\omega_2 = \sqrt{k_2/m}$ ، $\omega_3 = \sqrt{k_3/m}$ وتعطي الحركة بالحلول التالية

$$x = A\cos(\omega_1 t + \alpha)$$
$$y = B\cos(\omega_2 t + \beta) \qquad (٤ - ٣٧)$$
$$z = C\cos(\omega_3 t + \gamma)$$

مرة اخرى ، تحسب ثوابت التكامل الستة في المعادلات المذكورة اعلاه من الشروط الابتدائية . ويقع التذبذب الناتج للجسيم كليا في صندوق متوازى المستطيلات (اضلاعه $2A$ ، $2B$ ، $2C$) ومركزه في نقطة الاصل . في الحالة التي تتناسب فيها (ω_1 ، ω_2 ، ω_3) أى

$$\frac{\omega_1}{n_1} = \frac{\omega_2}{n_2} = \frac{\omega_3}{n_3} \qquad (٤ - ٣٨)$$

حيث n_1 ، n_2 ، n_3 تمثل اعداداً صحيحة ، سيكون المسار مغلقا لان الجسيم بعد مرور زمن مقداره $\frac{2\pi n_1}{\omega_1} = \frac{2\pi n_2}{\omega_2} = \frac{2\pi n_3}{\omega_3}$

يعود الى موضعه الابتدائي وتعاد الحركة مرة اخرى . (افترض في المعادلة (٤ - ٣٨) ان اى عامل مشترك قد اختصر) . وبالعكس ، يكون المسار مفتوحا

اذا كانت ω_1 وω_2 و ω_3 غير متناسبة ٠ وفي هذه الحالة يمكن ان يقال ان المسار يملأ متوازي المستطيلات المذكور اعلاه تماماً ، وبمعنى اخر اذا انتظرنا -على الاقل- زمنا كافيا ، فالجسيم سيعود مقتربا بصورة اعتباطية الى اية نقطة معينة ٠

في حالات عديدة تكون ازاحة محصلة القوة المعيدة المسلطة على ذرة معينة في مادة بلورية صلدة تقريبا خطية ٠ وتقع محصلة ترددات التذبذب اعتياديا في منطقة طيف تحت الحمراء : 10^{12} الى 10^{14} ذبذبة في الثانية ٠

(٤ ـ ٨) ٠ حركة الجسيمات المشحونة في المجالات الكهربائية والمغناطيسية

Motion of Charged Particles in Electric and Magnetic Fields

عندما يكون جسيم مشحون كهربائيا بجوار شحنات كهربائية اخرى ، تؤثر عليه قوة هذه القوة $\vec{F}$ تنشأ من المجال الكهربائي $\vec{E}$ للشحنات المجاورة وتكتب

$$\vec{F} = q\vec{E} \qquad (٤ ـ ٣٩)$$

حيث q تمثل الشحنة الكهربائية التي يحملها الجسيم في السؤال(٢).

وعليه تكون معادلة حركة الجسيم على النحو التالي

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\vec{E} \qquad (٤ ـ ٤٠)$$

او بدلالة المركبات

$$m\ddot{x} = q E_x$$
$$m\ddot{y} = q E_y \qquad (٤ ـ ٤١)$$
$$m\ddot{z} = q E_z$$

---

(٢) تقاس F بالنيوتن و q بالكولوم و E بالفولت لكل متر في وحدات M K S وتقاس F بالداينات و q بوحدات الالكتروستاتيك و E بالستاتفولت لكل سنتمتر في وحدات CGS .

وبصورة عامة ، تكون مركبات المجال دوال لاحداثيات الموضع x ، y ، z .
وفي حالة المجالات المتغيرة مع الزمن (اى ، اذا كانت الشحنات التي تولد $\vec{E}$ متحركة) فالمركبات تكون ، طبعا ، دوال للزمن t ايضاً .

لنفرض حالة بسيطة ، اى ، تلك التي يكون فيها المجال الكهربائي منتظماً .
فباختيار احد المحاور ، كالمحور ـ z ، باتجاه المجال . عندئذ $E_x = E_y = 0$
و $E = E_z$. ومعادلات الحركة ، اى معادلات (٤ ـ ٤١) ، لجسيم شحنته q
يتحرك في هذا المجال اذن تكون

$$\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{y} = 0$$

$$\ddot{z} = \frac{qE}{m} = \text{constant}$$

وهذه هي تماماً نفس معادلات حركة القذيفة في مجال جاذبية الارض المنتظم .
اذن المسار يكون قطعاً مكافئاً .

برهن في الكتب المدرسية للنظرية الكهرومغناطيسية (٣)
ان

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

اذا كانت $\vec{E}$ ناشئة من شحنات ساكنة . وهذا يعني لن الحركة في مثل هذا المجال تكون محافظة ، اى تتواجد دالة جهد ϕ بحيث تكون $\vec{E} = -\nabla\phi$.
والطاقة الكامنة لجسيم شحنته q في مجال كهذا تساوى عندئذ $q\phi$ والطاقة الكلية تكون ثابتة وتساوى $q\phi + \frac{1}{2}mv^2$.

عند تواجد مجال مغناطيسي ساكن $\vec{B}$ (يسمى الحث المغناطيسي)

---

(٣) مثلا J. C. Slater and N. H. Frank, Electromagnetism, McGraw-Hill, New York, 1947.

تمثل القوة المؤثرة على جسيم متحرك بدلالة الضرب الاتجاهي بصورة ملائمة ، على النحو التالي

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B}) \qquad (٤٢-٢)$$

حيث $\vec{v}$ تمثل السرعة و q الشحنة [٤] . والمعادلة التفاضلية للحركة لجسيم يتحرك في مجال مغناطيسي نقي هي

$$m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\,(\vec{v} \times \vec{B}) \qquad (٤٣-٤)$$

تبين المعادلة المذكورة اعلاه ان تعجيل الجسيم يكون دائما عموديا على اتجاه الحركة . وهذا يعني ان مركبة التعجيل المماسة ($\dot{v}$) تساوى صفرا ، ولذلك يتحرك الجسيم بانطلاق ثابت . ويصح ذلك حتى لو كانت $\vec{B}$ دالة متغيرة للموضع $\vec{r}$ شريطة ان لايتغير مع الزمن .

---

(٤) تصح المعادلة (٤ - ٤٢) لوحدات mks حيث تقاس F بالنيوتن ، q بالكولوم ، v متر/ ثانية ، و B الوبر/ متر مربع ، اما بوحدات cgs فيجب ان نكتب $\vec{F} = (q/c)\,(\vec{v} \times \vec{B})$ حيث $\vec{F}$ تقاس بالداينات و q بالوحدات الالكتروستاتيكيه و c سرعة الضوء وتساوى 3×10^{10} سم / ثانية و $\vec{B}$ بالكاوس (لاحظ خط الهامش (٣)

مثـــــال

لنختبر حركة جسيم مشحون في مجال مغناطيسي منتظم ثابت ، لنختار محور — z
باتجاه المجال ، اى ، اننا سنكتب $\vec{B} = \hat{k}B$

والمعادلة التفاضلية للحركة تكون على النحوالتالي

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q(\vec{v} \times \hat{k}B) = qB \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= m(\hat{i}\ddot{x} + \hat{j}\ddot{y} + \hat{k}\ddot{z}) = qB(\hat{i}\dot{y} - \hat{j}\dot{x})$$

وبمساواة المركبات ، نحصل على

$$m\ddot{x} = qB\dot{y}$$
$$m\ddot{y} = -qB\dot{x} \qquad (٤\text{—}٤٤)$$
$$\ddot{z} = 0$$

نصادف هنا ، ولاول مرة ، مجموعة من المعادلات التفاضلية للحركة ليست من النـــوع القابلة للفرز ، ولكن حلها بسيط نسبيا لان بامكاننا تكاملها مباشرة بالنسبة للزمن t لنحصل على

$$m\dot{x} = qBy + c_1$$
$$m\dot{y} = -qBx + c_2$$
$$\dot{z} = \text{constant} = \dot{z}_0$$

او

$$\dot{x} = \omega y + C_1$$
$$\dot{y} = -\omega x + C_2 \qquad (٤\text{—}٤٥)$$
$$\dot{z} = \dot{z}_0$$

حيث استخدمنا الاختصار ، $\omega = \frac{qB}{m}$. وتمثل c's ثوابت التكامـــــل

و $c_1 = \frac{c_1}{m}$ ، $c_2 = \frac{c_2}{m}$ • وعند تعويض $\dot{y}$ من المعادلة الثانية لمجموعة المعادلات (٤ ــ ٤٥) في المعادلة الاولى من مجموعة المعادلات (٤ ــ ٤٤) نحصل على المعادلة المفروزة لـ x التالية

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 a \qquad (٤ــ٤٦)$$

حيث $a = \frac{c_2}{\omega}$ • وواضح ان حل هذه المعادلة هو

$$x = a + A\cos(\omega t + \theta_0) \qquad (٤ــ٤٧)$$

حيث A ، θ_0 يمثلان ثابتي التكامل • والان ، اذا فاضلنا بالنسبة للزمن t نحصل على

$$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \theta_0) \qquad (٤ــ٤٨)$$

وعند تعويض $\dot{x}$ من المعادلة المذكورة اعلاه في الطرف الايسر من اولى معادلات (٤ــ٤٥) وحل المعادلة الناتجة للمتغير y • النتيجة تكون

$$y = b - A\sin(\omega t + \theta_0) \qquad (٤ــ٤٩)$$

حيث $b = -c_1/\omega$ • ولايجاد شكل مسار الحركة ، نحذف t بين المعادلتين (٤ ــ ٤٧) و (٤ ــ ٤٩) فنحصل على

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = A^2 \qquad (٤ــ٥٠)$$

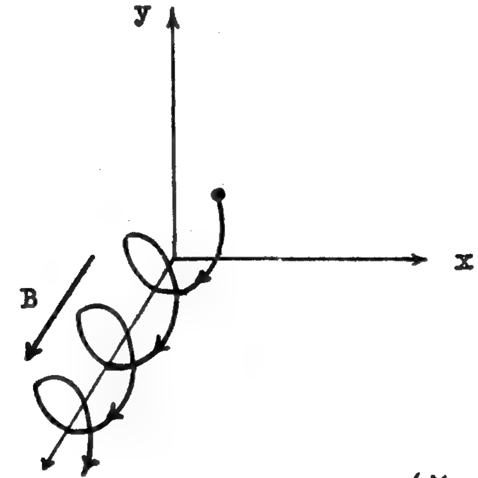
اى ان مسقط مسار الحركة على المستوى -xy هو دائرة نصف قطرها A ومركزها في النقطة (b و a) • لما كان الانطلاق من المعادلة الثالثة لمجموعة المعادلات (٤ــ٤٥) ثابتا باتجاه z نستنتج ان مسار الحركة حلزوني الشكل • ويكون محور المسار الحلزوني باتجاه المجال المغناطيسي كما هو مبين في الشكل (٤ــ٧) •

ونحصل من المعادلة (٤ ـ ٤٨) على

$$\dot{y} = -A\,\omega \cos(\omega t + \theta) \qquad (٤ ـ ٥١)$$

عند حذف t بين المعادلة (٤ ـ ٤٨) والمعادلة (٤ ـ ٥١) نجد ان

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = A^2\,\omega^2 = A^2 \left(\frac{qB}{m}\right)^2 \qquad (٤ ـ ٥٢)$$



الشكل (٤ ـ ٧)
المسار الحلزوني لجسيم مشحون يتحرك في مجال مغناطيسي

وبتعويض $v_1 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$ ، نرى ان نصف قطر الحلزون A يكون كالاتي

$$A = \frac{v_1}{\omega} = v_1 \frac{m}{qB} \qquad (٤ ـ ٥٣)$$

اذا كانت لاتوجد مركبة للسرعة باتجاه z ، فالمسار يكون دائرة نصف قطرها A. وواضح ان A يتناسب طرديا مع الانطلاق v_1 ، والتردد الزاوى ω للحركة في المسار الدائرى لايعتمد على الانطلاق. وتسمى ω بتردد السايكترون ، وقد اخترع ارنس لورنس Ernest Lawrence السايكترون ، الذى يعتمد بعمله على حقيقة

كون ω لاتعتمد على انطلاق الجسيم المشحون •

(٤ـ٩) حركة الجسيم المقيدة   Constrained Motion of a Particle

عندما يكون الجسيم المتحرك مقيدا هندسيا بالمفهوم الذى يجب ان يبقى فيه على منحني او سطح معين محدود ، فيقال عندئذ عن الحركة بانها مقيدة• من امثلة الحركة المقيدة قطعة الجليد المنزلق حول وبداخل اناء نصف كروى او الخرزة المنزلقة على سلك • والتقييد قد يكون كاملا كما في مثال الخرزة او قد يكون من جانب واحد كالمثال الاول• والمقيدات قد تكون ثابتة او متحركة • وفي هذا الفصل سندرس المقيدات الثابتة فقط •

(٤ـ١٠) معادلة الطاقة للمقيدات الملساء

The Energy Equation for Smooth Constraints

القوة الكلية المؤثرة على جسيم مقيد الحركة تساوى المجموع الاتجاهي للقوة الخارجية $\vec{F}$ وقوة التقييد $\vec{R}$ • القوة الاخيرة هي رد فعل المقيد على الجسيم• اذن يمكن كتابة معادلة الحركة على النحو التالي •

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{R} \qquad (٤ـ٥٤)$$

اذا ضربنا طرفي المعادلة عدديا بالسرعة $\vec{v}$ نحصل على

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \vec{F}\cdot\vec{v} + \vec{R}\cdot\vec{v} \qquad (٤ـ٥٥)$$

في حالة التقييد الاملس ـ مثل السطح عديم الاحتكاك ـ يكون رد الفعل $\vec{R}$ عموديا على السطح او المنحني بينما تكون السرعة $\vec{v}$ مماسة له • لذلك يتلاشى الضرب العددى $\vec{R}\cdot\vec{v}$ لان $\vec{R}$ يكون عموديا على $\vec{v}$ • والمعادلة (٤ ـ ٥٥) تصبح

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2} m\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

لذلك ، اذا كانت $\vec{F}$ محافظة ، يكون بامكاننا التكامل كما في البند (٤ـ٥) والحصول على نفس معادلة الطاقة اى ـ

$$\frac{1}{2} mv^2 + V(x,y,z) = \text{constant} = E \qquad (٤ـ٥٦)$$

اى ان الجسيم ولو يبقى على السطح او المنحني ، لكنه يتحرك • بمسار بحيث تكون الطاقة الكلية ثابتة • وهذه طبعا هي حالة التقيد الاملس •

مثـــال

وضع جسيم على قمة كرة ملساء نصف قطرها a • اذا ازيح الجسيم قليلا ، ففي ايـة نقطة سوف يترك الكـرة ؟

ألقوى المؤثرة على الجسيم هي قوة الجذب الارضي الى الاسفل وقوة رد فعـل السطح الكروى $\vec{R}$ • فمعادلة الحركة اذن تكون

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{R}$$

لنختر الاحداثيات كما هو مبين في الشكل (٤ ــ ٨) •فالطاقة الكامنة عندئذ تكـون mgz ، ومعادلة الطاقة تصبح

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = E$$

z
R
θ
mg
a
O
y

الشكل (٤ ــ ٨) القوى المؤثرة على جسيم ينزلق على كرة ملساء

من الشروط الابتدائية ($v = 0$ لـ $z = a$) تكـــون $E = mga$ ،

لذلك ، انطلاق الجسيم عند انزلاقـه الى الاسفل يكون

$$v^2 = 2g(a - z)$$

والان، اذا اخذنا المركبات القطبية لمعادلة الحركة ، يمكننا كتابة معادلـة القـــوة على النحو التالي

$$-\frac{mv^2}{a} = -mg\cos\theta + R = -mg\frac{z}{a} + R$$

اذن

$$R = mg\frac{z}{a} - \frac{mv^2}{a} = mg\frac{z}{a} - \frac{m}{a}2g(a - z)$$

$$= \frac{mg}{a}(3z - 2a)$$

اذن R تساوى صفرا عندما تكون $z = \frac{2a}{3}$ ، اى في النقطة التي يترك فيهـــا الجسيم الكـرة ، يمكن معرفة هذه ، من حقيقة كون تغير اشارة R هنـا ، مـــن الموجب الى السالب ،

(٤ــ١١) الحركة على منحني Motion on a Curve

للحالة التي تكون فيها حركة الجسيم مقيدة على منحني معين ، فمعادلة الطاقـة مـــع معادلات المنحني بشكلها البارمترى parametric form

$$x = x(s) \qquad y = y(s) \qquad z = z(s) \tag{٤ــ٥٧}$$

تكفي لحساب الحركة، (البارمتر s يمثل المسافة المقاسة على طول المنحنـــي مـــن نقطة مرجعيه اعتباطية) ، ويمكن ايجاد الحركة اذا اخذنا بنظر الاعتبار امكانية تمثيـــل الطاقة الكامنة كدالة للموضـع s فقط ، بينما الطاقة الحركية عبارة عـــن $\frac{1}{2}m\dot{s}^2$ ، اذن يمكن كتابة معادلة الطاقة كالاتي

$$\frac{1}{2}m\dot{s}^2 + V(s) = E \tag{٤ــ٥٨}$$

ومن هذه المعادلة يمكن ايجاد s (اى x ، y ، z) بالتكامل ،

وهناك طريقة اخرى ، وهي بتفاضل المعادلة المذكورة اعلاه بالنسبة للزمن t واختصار

العامل المشترك $\dot{s}$ لنحصل على المعادلة التفاضلية التالية لحركة الجســــــيم .

$$m\ddot{s} + \frac{dV}{ds} = 0 \qquad (٤ - ٥٩)$$

وهذه تكافيء المعادلة

$$m\ddot{s} - F_s = 0 \qquad (٤-٦٠)$$

حيث F_s تمثل مركبة القوة الخارجية $\vec{F}$ باتجاه s ، وهذا يعنـــــــي ان $F_s = -\frac{dV}{ds}$.

(٤-١٢) البنـدول البسيط The Simple Pendulum

ان ماذكرناه توا ، يوضح بصورة جيدة ، بواسطة البندول البسيط . وهو عبـارة عن جسيم ثقيل مربوط بطرف قضيب او حبل خفيفين غير قابلين للمد او البسط . وتكـــون الحركة بمستو شاقولي . والبندول البسيط يكافيء ايضا من الناحية الداينامية الخرزة المنزلقة على سلك دائرى املس في موضع شاقولي ، كما هو مبين في الشكل (٤ - ٩) .

افرض ان θ

الشكل (٤-٩) البندول البسيط

تمثل الزاوية التي يصنعها الخيط CP مع الشاقول حيث C هي مركـز المســـار

الدائرى و P الموضع الآني للجسيم ، وتقاس المسافة s من موضع الاستقرار، O
ومن الشكل نرى ان المركبة F_s لقوة الجذب الارضي mg باتجاه s هي
$-mg \sin\theta$. فاذا كان ℓ يمثل طول البندول عندئذ $\theta = s/\ell$ ، والمعادلة التفاضلية للحركة تصبح

$$m\ddot{s} + mg \sin(\frac{s}{\ell}) = 0$$

اوقد نكتبها بدلالة θ على النحو الاتي ـ

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0 \qquad (٤ _ ٦١)$$

ويجب ملاحظة ان الطاقة الكامنة V هي mgz حيث z هي المسافة العمودية للجسيم من النقطة O ، اى ـ

$$V = mgz = mg\ell\ (1 - \cos\theta)$$

$$= mg\ell - mg\ell\ \cos(\frac{s}{\ell})$$

اذن

$$-\frac{dv}{ds} = -mg \sin(\frac{s}{\ell}) = -mg \sin\theta = F_s \ .$$

لايجاد الحل التقريبي لمعادلة الحركة التفاضلية ، نفرض ان θ تبقى صغيرة ، ففي هذه الحالة

$$\sin\theta \simeq \theta$$

وبذلك نحصل على

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0 \qquad (٤ _ ٦٢)$$

وحل هذه المعادلة ، كما رأينا في البند (٣ ـ ٨) هو

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) \qquad (٤ _ ٦٣)$$

حيث $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ ، θ_0 تمثل سعة التذبذب و ϕ_0 هي عامل الطور. اذن ، الى الحد الذى يكون فيه تقريب $\sin\theta$ الى θ سارى المفعول تكون الحركة توافقية بسيطة ، وزمن ذبذبتها T_0 هو

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (٤_٦٤)$$

وهي العلاقة البسيطة المشهورة ٠

(٤_١٣) الحل الاكثر دقة لمسألة البندول البسيط والتذبذب غير الخطي

More Accurate Solution of the Simple Pendulum Problem and the Nonlinear Oscillator:

المعادلة التفاضلية لحركة البندول البسيط

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

هي حالة خاصة من المعادلات التفاضلية العامة لحركة تحت تاثير قوة معيدة غير خطية ، اى ، قوة تتغير بنمط ما غير التناسب المباشر مع الازاحة ٠ ويمكن كتابة المعادلة العامة في خط مستقيم بدون تضاؤل على النحو التالي

$$\ddot{\xi} + f(\xi) = 0 \qquad (٤_٦٥)$$

حيث المتغير ξ يمثل الازاحة من موضع الاستقرار ، بحيث

$$f(0) = 0$$

تتطلب المعادلات التفاضلية غير الخطية ، اعتياديا ، بعض الطرق التقريبية لحلها ٠

افرض ان الدالة $f(\xi)$ قد فكت كمتسلسلة اساسية power series في ξ ،

اى

$$f(\xi) = a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \ldots.$$

عندئذ المعادلة التفاضلية للحركة تصبح

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \ldots = 0 \qquad (٤_٦٦)$$

هذا هو شكل مفكوك معادلة الحركة العامة لتذبذب غير خطي بدون تضاؤل الحد $a_1\xi$ في المعادلة المذكورة اعلاه هو الحد الخطي ٠ اذا كان هذا الحد طاغيا ، اى ، اذا كان a_1 اكبر بكثير من المعاملات الاخرى ، عندئذ تكون الحركة تقريبا

توافقية بسيطة بتردد زاوى مقداره $a_1^{\frac{1}{2}}$ • ولايجاد الحل الاكثر دقة يجب اخذ بنظر الاعتبار الحدود غير الخطية المتبقية •

لتوضيح ذلك ، دعنا نعود الى مسألة البندول البسيط• فاذا استخدمنا المتسلسلة

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\ldots$$

واحتفظنا بالحدين الاول والثاني فقط ، فسنحصل على

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta - \frac{g}{6l}\theta^3 = 0 \qquad (٤_٦٧)$$

كتقريب ثان للمعادلة التفاضلية للحركة • نعلم ، قبل كل شيء ان الحركة توافقية ولنفرض اننا نجرب حلا بشكل دالة جيبيه بسيطة مثل •

$$\theta = A \cos \omega t$$

فعند تعويض هذه ، في المعادلة التفاضلية ، نحصل على

$$-A\omega^2 \cos \omega t + \frac{g}{l} A \cos \omega t - \frac{g}{6l} A^3 \cos^3 \omega t = 0$$

اوعند استخدام المتطابقة المثلثية

$$\cos^3 u = \tfrac{3}{4} \cos u + \tfrac{1}{4} \cos 3u$$

وتجميع الحدود ، نحصل على

$$\left(-A\omega^2 + \frac{g}{l} A - \frac{gA^3}{8l}\right)\cos \omega t - \frac{gA^3}{24l} \cos 3\omega t = 0$$

وباستثناء الحالة الاعتيادية $A = 0$ ، نرى ان المعادلة المذكورة اعلاه لايمكن ان تصح لجميع قيم t • لذلك دالة اختبارنا $A \cos \omega t$ لايمكن ان تكون حلا ، بسبب ظهور الحد $\cos 3\omega t$ في المعادلة المذكورة اعلاه ، ولكن قد نتوقع ان الحل الاختبارى بشكل

$$\theta = A \cos \omega t + B \cos 3\omega t \qquad (٤_٦٨)$$

سيكون تقريبها افضل من $A \cos \omega t$ • وقد ثبت ان هذه هي الحالة المقصودة • فاذا عوضنا الحل المذكور اعلاه في المعادلة (٤ـ٦٧) ، نحصل ، بعد اجراء عمليات مشابهة للعمليات السابقة ، على المعادلة التالية ـ

$$\left(-A\omega^2 + \frac{g}{\ell}A - \frac{gA^3}{8\ell}\right)\cos \omega t + \left(-9B\omega^2 + \frac{g}{\ell}B - \frac{gA^3}{24\ell}\right)\cos 3\omega t$$

+ (حدود لـ B مرفوعة لقوى اكبر ، واعلى مضاعفات لـ ωt) $= 0$

مرة اخرى لاتصح المعادلة لجميع قيم t ، ولكن ستكون دقة حلنا التقريبي معقولة اذا امكن وضع كل من معامل الحدين الاولين لجيوب التمام مساويا للصفر كل على انفراد • اى ان

$$-A\omega^2 + \frac{g}{\ell}A - \frac{gA^3}{8\ell} = 0, \quad -9B\omega^2 + \frac{g}{\ell}B - \frac{gA^3}{24\ell} = 0$$

من المعادلة الاولى

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell}\left(1 - \frac{A^2}{8}\right) \qquad (٤ـ٦٩)$$

من قيمة ω^2 هذه ، نجد من المعادلة الثانية ان

$$B = -A^3 \frac{1}{3(64 + 27A^2)} \simeq -\frac{A^3}{192}$$

الان ، من معادلة حلنا الاختبارى (٤ـ٦٨) نرى ان السعة θ_0 لتذبذب البندول هـي

$$\theta_0 = A + B$$
$$= A - \frac{A^3}{192}$$

او ، اذا كانت A صغيرة

$$\theta_0 \simeq A$$

معنى المعادلة (٤ـ٦٩) الان واضح • ويعتمد تردد التذبذب على السعة θ_0 • وبالحقيقة يمكننا كتابته ،

$$\omega \simeq \sqrt{\frac{g}{\ell}}\left(1 - \tfrac{1}{8}\theta_0^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

أو لزمن الذبذبة

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \simeq 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,(1 - \tfrac{1}{8}\,\theta_0^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\simeq 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,(1 + \frac{1}{16}\,\theta_0^2 + \ldots.) \qquad (٤\text{ـ}٧٠)$$

$$\simeq T_0(1 + \frac{1}{16}\,\theta_0^2 + \ldots)$$

حيث T_0 تمثل زمن الذبذبة لسعة مقدارها صفر كما حصلنا على ذلك في البند (٤ـ١٢) • ان التحليل السابق • وان كان على نحو لايمكن معه انكار عدم اتقانه • الا انه يوضح مظهرين جوهرين للتذبذب الحر تحت تاثير قوة معيدة غير خطية • وهي ان زمن ذبذبة الاهتزاز هي دالة لسعة الاهتزاز • ثم التذبذب ليس تماما داله جيبيه وانما يمكن اعتباره تداخلا من خليط من التوافقيات harmonics • ويمكن البرهنة على ان الاهتزاز لجهاز غير خطي • مدفوع بقوة دافعة جيبيه نقية سيكون مشوها ايضا • اى انه سوف يحتوى على توافقيات • فمثلا مكبر الصوت لمستلم الراديو او جهاز الهاى فاى قد يحدث تشويها (توافقيات) فوق وعلى تلك التي ادخلت من اجهزة التكبير الالكتروني •

(٤ـ١٤) الحل الدقيق لحركة البندول البسيط بدلالة التكاملات الموجزة

Exact Solution of the Motion of the Simple Pendulum by Means of Elliptic Integrals:

يمكن كتابة معادلة الطاقة من تعبير الطاقة الكامنة للبندول البسيط كالاتي ـ

$$\tfrac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 + mg\ell\,(1 - \cos\theta) = E \qquad (٤\text{ـ}٧١)$$

اذا سحب البندول جانبا بزاوية θ_0 (السعة) واطلق ($\dot{\theta}_0 = 0$)• عندئذ $E = mg\ell\,(1 - \cos\theta_0)$ • وتصبح المعادلة المذكورة اعلاه بعد نقل الحدود والقسمة على $m\ell^2$ • على النحو التالي ـ

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{\ell}\,(\cos\theta - \cos\theta_0) \qquad (٤\text{ـ}٧٢)$$

وعند استعمال المتطابقة ($\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$) • يمكن كتابتها كالاتي

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{\ell} \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \qquad (٤_٧٣)$$

من المناسب تمثيل الحركة بدلالة المتغير ϕ المعرف بالمعادلة

$$\sin \phi = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)} = \frac{1}{k} \sin \frac{\theta}{2} \qquad (٤_٧٤)$$

وعند تفاضلها بالنسبة للزمن t ، نحصل على

$$(\cos \phi)\, \dot{\phi} = \frac{1}{k} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{\dot{\theta}}{2} \qquad (٤_٧٥)$$

من المعادلتين (٤_٧٤) و (٤_٧٥) يمكننا تحويل المعادلة (٤_٧٣) بسهولة الى معادلة مناظرة بدلالة ϕ ، اى

$$\dot{\phi}^2 = \frac{g}{\ell} (1 - k^2 \sin^2 \phi) \qquad (٤_٧٦)$$

عندئذ يمكن ايجاد العلاقة بين ϕ و t بفرز المتغيرات والتكامل

$$t = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{(1-k^2 \sin^2\phi)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\, F(k,\phi) \qquad (٤_٧٧)$$

وتسمى الدالة

$$F(k, \phi) = \int_0^{\phi} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-\frac{1}{2}}\, d\phi$$

بالتكامل الموجز الناقص من النوع الاول Incomplete elliptic integral- of the first kind.

ويحسب زمن ذبذبة البندول بملاحظة زيادة θ من 0 الى θ_0 بربع دورة واحدة .

لذلك نرى ان ϕ تتغير من 0 الى $\frac{\pi}{2}$ بنفس الفترة الزمنية . اذن يمكننا كتابة زمن الذبذبة T كالاتي

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(1-k^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\, K(k) \qquad (٤_٧٨)$$

وتسمى الدالة

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} (1-k^2 \sin^2 \phi)^{-\frac{1}{2}}\, d\phi = F(k, \pi/2)$$

بالتكامل الموجز التــام من النوع الاول . وهناك جداول [٥] رتبت فيها قيــــم التكاملات الموجزة . على اية حال يمكن ايجاد علاقة جبرية مقربة وذلك بفك تكامــل المعادلة (٤ـ٧٨) باستخدام نظرية ذات الحدين ، والتكامل حدا فحــــدا . والنتيجة تكون

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{k^2}{2}\sin^2\phi + \ldots\right) d\phi$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{k^2}{4} + \ldots\ldots\right) \qquad (٤ـ٧٩)$$

والان لقيم صغيرة للسعة θ_o ، نحصل على

$$k^2 = \sin^2 \frac{\theta_o}{2} \simeq \frac{\theta_o^2}{4}$$

لذلك يمكننا كتابة التقريب

$$T \simeq 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{\theta_o^2}{16} + \ldots\ldots\right) \qquad (٤ـ٨٠)$$

الذي يتفق مع قيمــة T التي استنتجت في البند السابق .

مثـــال

جد زمن ذبذبة بندول بسيط يهتز بسعة (٢٠) درجة . استخدم جداول التكاملات الموجزة ، وقارنها ايضا مع القيم المحسوبة بالتقريبات المذكورة اعـــلاه .

---

(٥) انظر في كتاب L. M. Milne-Thomson, Jacobian Elliptic Function Tables, Dover, New York, 1950, or B. O. Peirce, A Short Table of Integrals, Ginn, Boston, 1929.

للسعة ٢٠° $k = \sin 10^\circ = 0.17365$

و $\theta_0/2 = 0.17453$ radians

النواتج هي كما يلي

من الجداول والمعادلة (٤ـ٧٨)

$$T = 4\sqrt{l/g}\,K(10^\circ) = \sqrt{l/g}\,(6.3312)$$

من المعادلة (٤ـ٧٩)

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}\,(1 + \tfrac{1}{4}\sin^2 10^\circ) = \sqrt{l/g}\,(6.3306)$$

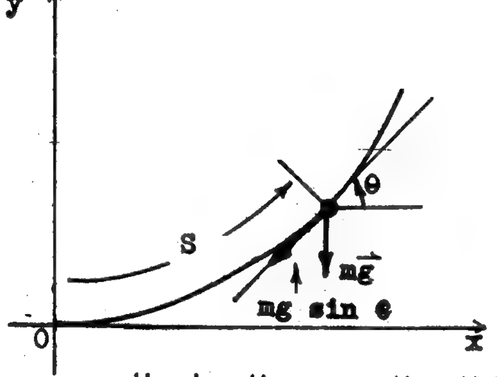
من المعادلة (٤ـ٨٠)

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}\,(1 + \theta_0^2/16) = \sqrt{l/g}\,(6.3310)$$

العلاقة الابتدائية $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g} = \sqrt{l/g}\,(6.2832)$

(٤ـ١٥) مسألة تساوى الزمن The Isochronous Problem

من الممتع تحرى السؤال فيما اذا كان هناك منحن مقيد ام لا ، بحيث يتذبذب فيه الجسيم تحت تأثير الجاذبية الارضية بازمان متساوية ، اى بزمن ذبذبة لايعتمد على السعة



الشكل (٤ـ١٠) القوى المؤثرة في حالة تساوى الزمن

افرض ان θ تمثل الزاوية بين الخط الافقي والماس للمنحني المقيد كما هـو مبين في الشكل (٤ــ١٠) • عند ئذ تكون مركبة الجذب الارضي باتجاه الحركـــة $-mg \sin \theta$ والمعادلة التفاضلية للحركة على طول المسار المقيد (افرضـه املـس) عند ئذ تكون

$$m\ddot{s} = -mg \sin \theta \qquad (٤ـ٨١)$$

ولكن اذا كانت المعادلة المذكورة اعلاه تمثل حركة توافقية بسيطة على طول المنحنـــي • فيجب ان نحصل على ـ

$$m\ddot{s} = -ks \qquad (٤ـ٨٢)$$

اذ ن • المنحني المقيد الذى يستوفي المعادلة

$$s = c \sin \theta \qquad (٤ـ٨٣)$$

سيسبب حركة توافقية بسيطة •

الان يمكننا ايجاد x و y بدلالة θ من المعادلة المذكورة اعلاه كالاتي

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{ds}\,\frac{ds}{d\theta} = (\cos \theta)\,(c \cos \theta)$$

اذ ن

$$x = \int c \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{c}{4}(2\theta + \sin 2\theta) \qquad (٤ـ٨٤)$$

وبالمثـل

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{ds}\,\frac{ds}{d\theta} = (\sin \theta)\,(c \cos \theta)$$

وهكـذا

$$y = \int c \sin \theta \cos \theta \, d\theta = -\frac{c}{4} \cos 2\theta \qquad (٤ـ٨٥)$$

تمثل (٤ـ٨٤) و (٤ـ٨٥) معادلات البارمتر الدويرى cycloid • لذلـك سيسبب المنحني المقيد الذى على شكل ديورى حركة تتغير فيها s توافقيا مع الزمن •

وسوف لايعتمد زمن الذبذبة على السعة • وكنتيجة طبيعية ، نرى ان الجسيم الذى يبدأ من السكون على منحن دويرى املس سيستغرق نفس الزمن ليصل الى القعر بغض النظر عن نقطة البداية •

لقد اكتشف الفيزيائي والرياضي الهولندى كرستيان هويكن Christiaan Huygens الحقائق المذكورة اعلاه لعلاقتها بالمحاولات التي اجراها لتحسين بندول الساعات • كذلك اكتشف نظرية المحلات الهندسية لمراكز الانحناء (evolute) ووجد ان المحل الهندسي لمركز انحناء الدويرى هو دويرى ايضا • اذن عند تجهيز البندول (بحدود) دويرية ، فان حركة كرة البندول ، يجب ان تتبع مسارا دويريا وزمن الذبذبة اذن لايعتمد على السعة • وبالرغم من براعة الاختراع ، الا انه لم يستغل ابدا في تطبيقات عملية •

(٤ـ١٦) البندول الكروى The Spherical Pendulum

من امثلة الحركة المقيدة الكلاسيكية حركة جسيم على سطح كروى املس ، كانزلاق كتلة صغيرة داخل وحول اناء كروى املس • وقد تمثل الحالة بصورة ملائمة بواسطة كرة ثقيلة مربوطة في نهاية وتر او قضيب غير قابل للمط او البسط وتتأرجح بحرية بأى اتجاه كان حول نقطة ثابتة • كما هو مبين في الشكل (٤ـ١١) وهذا يسمى بالبندول الكروى

الشكل (٤ـ١١) البندول الكروى

الحل التقريبي بالاحداثيات الديكارتيه

هناك قوتان تؤثران على الجسم ، هما قوة الجذب الارضي التي تتجه نحو الاسفل وقوة الشد $\vec{S}$ في القضيب المقيد او الوتر ، عندئذ تكون المعادلة التفاضلية للحركة

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{S} \qquad (٤_٨٦)$$

اذا اخذنا المحور ـ z بالاتجاه الشاقولي ، تكون مركبات معادلة الحركة بدلالة الاحداثيات الديكارتيه ، على النحو التالي

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= S_x \\ m\ddot{y} &= S_y \\ m\ddot{z} &= S_z - mg \end{aligned} \qquad (٤_٨٧)$$

ويمكن ايجاد حل تقريبي بسهولة عندما تكون الازاحة عن موضع الاستقرار صغيرة جداً ، حيث يكون مقدار الشد ثابتا تقريبا ومساويا الى mg ولما كانت $|x| \ll \ell$ ، $|y| \ll \ell$ ، $z \simeq 0$ عندئذ مركبات x و y للشد $\vec{S}$ تعطى بالعلاقات المقربة التالية

$$S_x \simeq -mg\frac{x}{\ell} \qquad S_y \simeq -mg\frac{y}{\ell}$$

والتي يمكن تحقيقها بسهولة من هندسة الشكل ، ومعادلات x ـ y التفاضلية للحركة عندئذ تصبح

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{g}{\ell}x &= 0 \\ \ddot{y} + \frac{g}{\ell}y &= 0 \end{aligned} \qquad (٤_٨٨)$$

وهذه مماثلة لمعادلات التذبذب التوافقي ذي البعدين الذي سبق وان بحثناه في (٤ـ٧) والحلول هي

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t + \alpha) \\ y &= B\cos(\omega t + \beta) \end{aligned} \qquad (٤_٨٩)$$

حيث

$$\omega = \left(\frac{g}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (٤_٩٠)$$

كما فـــي البندول المستوى البسيط •
الى الحد الذى تكون فيه تقريباتنـــاسارية المفعول ، يكون مسقط الحركة على المستوى $x\ y$ ـ قطعا ناقصا • هناك ، طبعا ، حالات خاصة يكون فيها المسقط خطا مستقيما او دائرة ويعتمد ذلك على الشروط الابتدائية •

الحل باستخدام الاحداثيات الكروية

سنستخدم الاحداثيات الكروية كما عُرِّفت في الشكل (٤ــ١١) لمعالجة البندول الكروى بدقة اكثر من التي ذكرت اعلاه • هناك للشد $\vec{S}$ مركبة قطبية واحدة فقط بينما للثقل $m\vec{g}$ مركبتان قطبية $mg\cos\theta$ ومستعرضة $-mg\sin\theta$ لذلك يمكن تحليل المعادلة التفاضلية للحركة بالاحداثيات الكروية على النحو التالي ــ

$$ma_r = F_r = mg\cos\theta - S$$
$$ma_\theta = F_\theta = -mg\sin\theta \qquad (٤ ــ ٩١)$$
$$ma_\phi = F_\phi = 0$$

سبق وان استنبطت مركبات التعجيل الثلاث a_ϕ, a_θ, a_r في الفصل الثاني ، البند (٢ــ٩) ، ولما كان التقيد هو $r = \ell = \text{constant}$

فيمكننا اهمال المركبة القطبية للتعجيل ، والمركبتان الاخريتان تصبحان ــ

$$a_\theta = \ell\ddot{\theta} - \ell\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta$$
$$a_\phi = \ell\ddot{\phi}\sin\theta + 2\ell\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta$$

وبعد نقل الحدود واجراء الاختصارات الضرورية تصبح المعادلات التفاضلية في θ , ϕ على النحو التالي ــ

$$\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \qquad (٤ ــ ٩٢)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{dt}(\dot{\phi}\sin^2\theta) = 0 \qquad (٤ ــ ٩٣)$$

المعادلة الثانية تعني ان الكمية المحصورة بين القوسين ثابتة ، فلنسمهـــا h •

عند ئذ يمكننا كتابـــة

$$\dot{\phi} = \frac{h}{\sin^2 \theta} \qquad (٤ - ٩٤)$$

عندتعويض قيمة $\dot{\phi}$ المذكورة اعلاه في المعادلة (٤ـ٩٢)، نحصـل علـــى المعادلة المفروزة فـي θ التالية ـ

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta - h^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} = 0 \qquad (٤ - ٩٥)$$

من المستحسن تناول بعض الحالات الخاصة في هذا الصدد . اولا اذا كانت الزاويـــة ϕ ثابتة، عندئذ $\dot{\phi} = 0$ ولذلك $h = 0$. اذن تصبح المعادلــــــة (٤ـ ٩٥) كالاتي ـ

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

وهذه هي بالضبط المعادلة التفاضلية للبندول البسيط . والحركة تحدث فــــي المستوى

$$\phi = \phi_0 = \text{constant} \quad (\text{ثابت})$$

الحالة الخاصة الثانية هي البندول المخروطي conical pendulum الذي فيه (ثابت) $\theta = \theta_0 = \text{constant}$. وفي هذه الحالة $\dot{\theta} = 0$ و $\ddot{\theta} = 0$ ، لذلك تختصر المعادلة (٤ـ٩٥) الى

$$\frac{g}{\ell} \sin \theta_0 - h^2 \frac{\cos \theta_0}{\sin^3 \theta_0} = 0$$

او

$$h^2 = \frac{g}{\ell} \sin^4 \theta_0 \sec \theta_0 \qquad (٤ - ٩٦)$$

من قيمة h المبينة في المعادلة السابقة ، نجد من المعادلة (٤ـ٩٤) ، ان

$$\dot{\phi}_0^2 = \frac{g}{\ell} \sec \theta_0 \qquad (٤ - ٩٧)$$

كشرط لحركة البندول المخروطي

يمكن كذلك استنباط المعادلة السابقة ، اذا اخذنا بنظر الاعتبار القوى المؤثرة على الجسيم في حركته الدائرية ، كما هو مبين في الشكل (٤ـ١٢) . التعجيل ثابت المقدار ، اى $\rho\dot{\phi}_0^2 = (\ell \sin \theta_0)\dot{\phi}_0^2$ ويتجه نحو مركز المسار الدائرى .

اذن ، عند اخذ المركبات الافقية والعمودية ، نحصل على

$$S \sin \theta_0 = (m\ell \sin \theta_0)\,\dot{\phi}_0^2 \qquad (٤ - ٩٨)$$

$$S \cos \theta_0 = mg$$

وعند حذف S بين المعادلتين نحصل على المعادلة (٤ـ٩٧)

الشكل (٤ ـ ١٢)

الحالة المخروطية للبندول الكروى

لنفرض الان الحالة التي تكون فيها الحركة مخروطية ، الى حد بعيد ، اى ، تبقى قيمة θ قريبة من قيمة θ_0 . فاذا عوضنا عن مقدار h^2 من المعادلة (٤ ـ ٩٦) ، في المعادلة التفاضلية المفروزة في θ ، اى المعادلة (٤ـ٩٥) فان النتيجة تكون

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\left(\sin\theta - \frac{\sin^4\theta_0}{\cos\theta_0}\;\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\right) = 0 \qquad (٤ - ٩٩)$$

من الملائم هنا ، ادخال متغير جديد ξ والمعرف كما يلي

$$\xi = \theta - \theta_0 \qquad (٤ـ١٠٠)$$

ويفك القوس في المعادلة (٤ـ٩٩) كمتسلسلة اساسية في ξ وفقا للعلاقة القياسية التالية

$$f(\xi) = f(0) + f'(0)\,\xi + f''(0)\,\frac{\xi^2}{2!} + \cdots\cdots$$

نجد بعد اجراء العمليات الضرورية ، ان $f(0) = 0$ ، $f'(0) = 3\cos\theta_0 + \sec\theta_0$.

ولما كانت تهمنا الحالة التي تكون فيها قيم ξ صغيرة ، فسنهمل ξ المرفوعة الى قوى اكبر من واحد ، وبذلك نستطيع كتابة المعادلة (٤ـ٩٩) على الشكل التالي ـ

$$\ddot{\xi} + \frac{g}{\ell} b \xi = 0 \qquad (١٠١\text{ـ}٤)$$

حيث $b = 3\cos\theta_0 + \sec\theta_0$. فالحركة بدلالة ξ او θ اذن تكون

$$\xi = \theta - \theta_0 = \xi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{gb}{\ell}}\, t + \epsilon\right) \qquad (١٠٢\text{ـ}٤)$$

اذن تتذبذب θ توافقيا حول القيمة θ_0 ، بزمن ذبذبة مقداره ـ

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{gb}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g(3\cos\theta_0 + \sec\theta_0)}} \qquad (١٠٣\text{ـ}٤)$$

والان قيمة $\dot{\phi}$ ، من المعادلة (٤ـ٩٤) ، لاتتغير كثيرا عن القيمة المبينة في الحركة المخروطية الصرفة $\dot{\phi}_0$ ، لذلك تزداد ϕ باستمرار خلال تذبذب θ حول θ_0 . وقد وضح مسار الجسيم في الشكل (٤ ـ١٣) . وتزداد قيمة زاوية السمت ϕ خلال ذبذبة واحدة كاملة للزاوية θ بمقدار

$$\phi_1 = \dot{\phi}_0 T_1$$

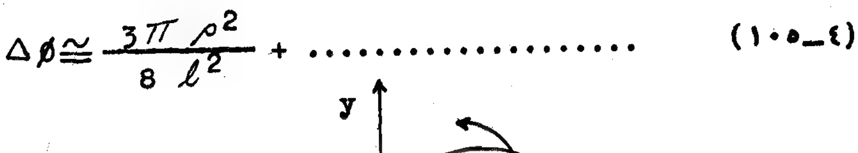
من قيم $\dot{\phi}_0$ و T_1 المذكورة اعلاه ، نجد بسهولة ان

$$\phi_1 = 2\pi(3\cos^2\theta_0 + 1)^{-\frac{1}{2}} \qquad (١٠٤\text{ـ}٤)$$

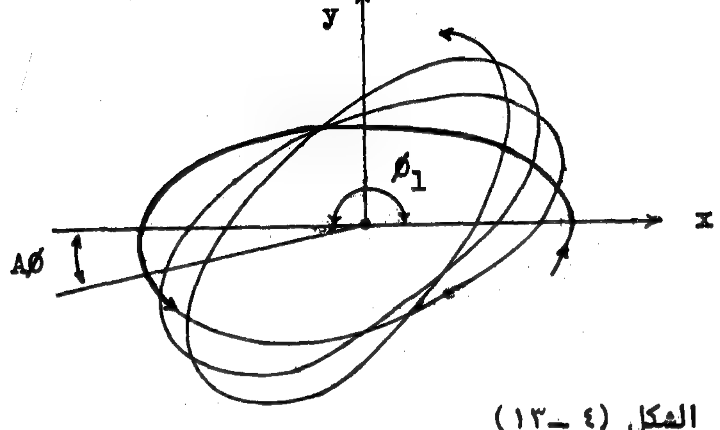
لنفرض ان ρ تمثل نصف قطر الدائرة عندما تكون $\theta = \theta_0$ ، كما هو مبين في الشكل (٤ ـ١٢) . عندئذ $\cos^2\theta_0 = 1 - \rho^2/\ell^2$ وبناء على ذلك يمكن كتابة المعادلة (٤ ـ١٠٤) على النحو التالي $\phi_1 = 2\pi(4 - 3\rho^2/\ell^2)^{-\frac{1}{2}}$

اذن ϕ_1 اكبر من π بقليل . وبفك القوس لقوى ρ ، نجد ان الزيادة $\Delta\phi$

تكـــون



$$\Delta\phi \cong \frac{3\pi}{8}\frac{\rho^2}{l^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (٤_١٠٥)$$



الشكل (٤ ــ١٣)
المسقط على المستوى ــ x y لمسار حركة
البندول الكــــروى

برهنا في بداية هذا البند ، ان مسقط مسار كرة البندول على المستوى ــ x y يكـــون تقريبا قطعا ناقصا ، اذا كانت الزاوية θ صغيرة . يمكننا الان تفسير النتيجـــة السابقة لتعني ان محور القطع الناقص الاكبر غير مستقر ، وانما يتقدم Precesses باتجاه ازدياد ϕ . حيث يدور محور القطع الناقص بزاوية Δϕ خلال كل ذبذبة كاملـــة في θ . كما هو مبين في الشكل (٤ ــ ١٣) .

اعتبارات الطاقة ــ غايات الحركة الشاقولية

Energy Considerations. Limits of the Vertical Motion

من المستحسن استخدام معادلة الطاقة ، لايجاد العلاقة بين سعة الذبذبـــة الشاقولية للبندول الكروى ومرتسمات المسألة ، بدلالة رموزنا ، تكون الطاقـــة الكامنـــة

$$V = -mg\,l\cos\theta$$

لايجاد الطاقة الحركية ، نستخدم مركبات السرعة بدلالة الاحداثيات الكروية والتي هي $(\dot{r}, r\dot{\theta}, r\dot{\phi}\sin\theta)$. اذن ، لما كانت ثابت = $r = \ell$ لذلك نحصل على $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{\theta}^2 + \ell^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta)$.

عندئذ تصبح معادلة الطاقة

$$E = \frac{m\ell^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) - mg\ell\cos\theta \qquad (٤ _ ١٠٦)$$

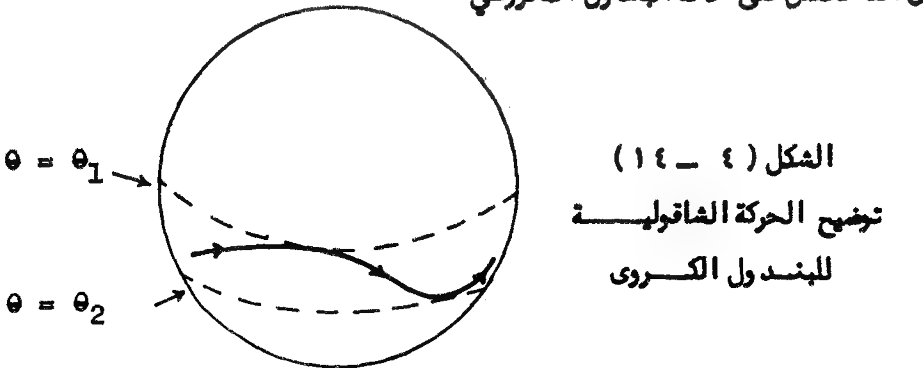
لنحل المعادلة المذكورة اعلاه لـ $\dot{\theta}^2$. لانجاز ذلك ، علينا استخدام العلاقة التي استنبطت سابقا ، والتي $\dot{\phi} = h/\sin^2\theta$. ولنفرض ايضا ان $u = \cos\theta$.

وبذلك تكون النتيجة

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2E}{m\ell^2} + \frac{g}{\ell}u - \frac{h^2}{1-u^2} = f(u) \qquad (٤ _ ١٠٧)$$

وجذور المعادلة $f(u) = 0$ تعطي غايات او نقاط رجوع التذبذب في θ فلان $\dot{\theta}$ تتلاشى لهذه الجذور . والحركة تنحصر لقيم θ التي تكون فيها $f(u)$ غير سالبة . لذلك يقع التذبذب الشاقولي بين دائرتين افقيتين ، انظر الشكل (٤ _ ١٤) . في الحالة الخاصة التي يتساوى فيها الجذران الحقيقيان عندئذ تنحصر الحركة بدائرة منفردة افقية .

اى اننا نحصل على حالة البندول المخروطي .



الشكل (٤ _ ١٤)
توضيح الحركة الشاقولية للبندول الكروى

تمارين

٤ ــ ١ بايجاد الدوران (curl) ، بيّن أياً من القوى التالية محافظة ــ

(a) $\vec{F} = \hat{i}cyz + \hat{j}czx + \hat{k}cxy$

(b) $\vec{F} = \hat{i}cyz + \hat{j}cxy + \hat{k}czx$

(c) $\vec{F} = \hat{i}\frac{cy}{z} + \hat{j}\frac{cx}{z} - \hat{k}\frac{cxy}{z^2}$

(d) $\vec{F} = k\,\frac{\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z}{x^4 + y^4 + z^4}$

(e) $\vec{F} = k\,\frac{\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = k\vec{r}/r^4$

(f) $\vec{F} = k\vec{r}/r^3$

(g) $\vec{F} = \hat{i}e^{a(x+y)} + \hat{j}e^{b(x+y)} + \hat{k}e^{cz}$

حيث $a \neq b$

(h) كما في (g) ولكن ضع $a = b$

٤ ــ ٢ جد دالة القوة التي ترافق كلاً من دوال الطاقة الكامنة التالية

(a) $V = k(x^2 + 2xy + y^2)$

(b) $V = ax^2 + bxy + cy^2$

(c) $V = kxy/z^2$

(d) $V = ke^{a(x+y+z)}$

(e) $V = ke^{a(x^2+y^2+z^2)}$

(f) $V = k(x + y + z)^n$

٤ ــ ٣ جسيم كتلته m يتحرك في مجال قوة دالة جهده $V = ax + by^2 + cz^3$.

اذا مر الجسيم من نقطة الاصل بانطلاق v_0 فما هو انطلاقه عندما يمر في

النقطة (1 , 1 , 1) ؟

٤ ـ ٤ بين ان تغير الجاذبية مع الارتفاع يمكن حسابه تقريبا من دالة الطاقة الكامنة التالية

$$V = mgz\left(1 - \frac{z}{R}\right)$$

حيث R يمثل نصف قطر الارض . جد القوة من دالة الجهد المذكورة اعلاه . ومنها جد مركبات المعادلات التفاضلية لحركة القذيفة تحت تأثير قوة كهذه .

٤ ـ ٥ افرض دالتي القوتين التاليتين ـ

(a) $\vec{F} = \hat{i}x + \hat{j}y$ (b) $\vec{F} = \hat{i}y - \hat{j}x$

بيّن ان (a) محافظة وان (b) غير محافظة . حقق ان $\int \vec{F}.d\vec{r}$ لايعتمد على مسار التكامل لـ (a) ، ولكنه يعتمد لـ (b) ، باخذ مسارين بدايتيهما نقطة الاصل (٠ر ٠) ، ونهايتيهما النقطة (١ر ١) . لاحد المسارين خذ المستقيم x = y . وللمسار الاخر خذ المحور ـ x حتى النقطة (١ر ٠) ، ثم خذ المستقيم x = ١ الى النقطة (١ر ١) .

٤ ـ ٦ في التمرين (٤ ـ ١) ، جد دالة الطاقة الكامنة للقوى المحافظة .

٤ ـ ٧ اطلقت قذيفة من نقطة الاصل ، بانطلاق ابتدائي v_o وميل θ مع الافق . اذا اهملت مقاومة الهواء ، واعتبرت الارض مستوية ، برهن ان القذيفة ستضرب الارض على مسافة

$$\frac{v_o^2 \sin 2\theta}{g}$$

من نقطة الاصل . هذه المسافة تسمى بالمدى الافقي .

٤ ـ ٨ في التمرين (٤ ـ ٧) ، اذا كانت مقاومة الهواء خطيه ، فبرهن على ان النقصان في المدى الافقي من نقطة الاصل يساوى تقريبا

$$4v_o^3 \gamma \sin\theta \sin 2\theta / 3g$$

٤ ـ ٩ انقذفت جسيمات من الطين من الحافة العليا لعجلة متدحرجة • اذا كان v_o الانطلاق الامامي للعجلة ونصف قطرها b ، اثبت ان اعلى ارتفاع يمكن ان يصله الطين فوق سطح الارض هو

$$b + \frac{v_o^2}{2g} + \frac{gb^2}{2v_o^2}$$

في اية نقطة سيترك الطين محيط العجلة المتدحرجة ؟

٤ ـ ١٠ وضعت بندقية في اسفل تل انحداره ثابت وليكن ϕ • برهن على ان مدى البندقية المقاس اعلى انحدار التل هو

$$\frac{2v_o^2 \cos\theta \sin(\theta - \phi)}{g \cos^2\phi}$$

حيث θ تمثل زاوية ميل البندقية •

٤ ـ ١١ اثبت ان اعظم قيمة لمدى الانحدار في التمرين السابق هو

$$v_o^2/g\,(1 + \sin\phi)$$

٤ ـ ١٢ اكتب مركبات المعادلة التفاضلية لحركة القذيفة ، اذا كانت مقاومة الهواء تتناسب مع مربع الانطلاق • هل المعادلات قابلة للفرز ؟ بين ان مركبة ـ x للسرعة هي

$$\dot{x} = \dot{x}_o\, e^{-\gamma s}$$

حيث s هي المسافة التي قطعتها القذيفة على طول مسار الحركة •

٤ ـ ١٣ اذا علمت ان $\omega = 2\ \sec^{-1}$ لمتذبذب توافقي معين موحد الخواص يتحرك في بعدين • واذا كانت الشروط الابتدائية هي

$x_o = 2$ cm $\qquad \dot{x}_o = 0$

$y_o = 2$ cm $\qquad \dot{y}_o = 4$ cm/sec

جد ثوابت مسار القطع الناقص وارسم القطع الناقص

٤ ـ ١٤ وضعت ذرة بداخل بلورة شبكية بسيطة مكعبة الشكل • اذا كانت الطاقة الكامنة للتصادم بين اى ذرتين من النوع $cr^{-\alpha}$ حيث c, α ثوابت و r المسافة بين الذرتين • اثبت ان الطاقة الكلية للتصادم لذرة معينة مع الذرات الست العائدة لها

والقريبة منها تقريبا تساوى جهد متذبذب توافقي ذى الابعـــاد الثـــــلاثـــة اى :-

$$V = A + B\,(x^2 + y^2 + z^2)$$

حيث B, A ثوابت • (ملاحظة ـ افرض ان الذرات الست المجاورة ثابتة ومواضعهـــا هي النقاط $(0,0,\pm d),(0,\pm d,0),(\pm d,0,0)$ والازاحـــــة (x, y, z) للذرة من موضع الاستقرار $(0,0,0)$ صغيرة بالمقارنة مع d) •

٤ ـ ١٥ جسيم وحدوى الكتلة يتحرك في جهد متذبذب توافقي ثلاثي الابعاد وغيـــر موحد الخواص $V = x^2 + 2y^2 + 4z^2$ فاذا مر الجسيم في نقطة الاصل بانطـــلاق مقداره واحد وباتجاه (١ ر ١ ر ١) في الزمن $t = 0$ جد z, y, x كدوال للزمـــن •

٤ ـ ١٦ يتحرك الكترون في مجال قوة يتكون من مجال كهربائي منتظم $\vec{E}$ ومجـــال مغناطيسي منتظم $\vec{B}$ عموديا على $\vec{E}$ • افرض ان $\vec{E} = \hat{j}E$ و $\vec{B} = \hat{k}B$ • وخـــذ موضع الالكترون الابتدائي في نقطة الاصل وسرعة ابتدائية $\vec{v}_0 = \hat{i}v_0$ • وباتجـــاه x • جد محصلة الحركة للجسيم • واثبت ان مسار الحركة هو الدويرى

$$x = a \sin \omega t + bt$$
$$y = c(1 - \cos \omega t)$$
$$z = 0$$

ويستفاد من الحركة الدويرية للالكترون في المكنترون magnetron وقد استـخـــدم الصمام الالكتروني للحصول على موجات راديوية عالية التردد •

٤ ـ ١٧ • وضع جسيم على جانب كرة ملساء نصف قطرها b وعلى مسافة $b/2$ مـــن مستواها المركزى • عند انزلاق الجسيم اسفل جانب الكرة • فبأى نقطة سوف يتركهـــا •

٤ ـ ١٨ • تنزلق خرزة على سلك محلزن املس محوره شاقولي • فاذا كان نصف قطـــر الحلزون b وهناك n لفـــة في وحدة الطول • جد تعجيل الخرزة كدالـــة للزمـــن • افرض ان الخرزة تبدأ من السكون •

٤ ـ ١٩ تنزلق خرزة على سلك دائرى املس نصف قطره b . فاذا كان مستوى الحلقة شاقوليا ، وابتدأت الخرزة من السكون من نقطة بمستوى مركز الحلقة . جد انطلاق الخرزة في الاسفل ورد فعل السلك على الخرزة في هذه النقطة .

٤ ـ ٢٠ في التمرين السابق جد الزمن اللازم للخرزة حتى تنزلق الى اسفل الحلقة . اعتبر b مساوياً الى ١٠ سم .

٤ ـ ٢١ استخدم بندول بسيط في تجربة مختبرية لايجاد قيمة g . اذا كانت سعة تذبذب البندول ٣٠° ، جد الخطأ الذى يسببه استخدام العلاقة الابتدائية التالية ـ

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}$$

٤ ـ ٢٢ بندول كروى طوله متر واحد يصنع ذبذبات صغيرة حول الزاوية المخروطية θ_0. اذا كانت θ_0 تساوى ٣٠° ، جد زمن ذبذبة الحركة المخروطية ، وزمن ذبذبة θ حول θ_0 وزاوية التقدم $\Delta\phi$.

٤ ـ ٢٣ برهن على ان الجذرين الحقيقيين للمعادلة $f(u)=0$ ، اى المعادلة (٤ ـ ١٠٧) يتساويان في حالة البندول المخروطي .

٤ ـ ٢٤ ثُبت سلك بندول كروى طوله l في موضع ابتدائي بحيث يصنع زاوية ٩٠° مع الشاقول . فاذا ابتدأت الكرة بسرعة افقية v_0 عمودياً على السلك . وكان

$$v_0^2 = \frac{1}{2} g l$$

جد اوطأ مستوى تصله كرة البندول خلال حركتها . [تلميح ـ من الشروط الابتدائية ، $u = 0$ هي احدى جذور المعادلة $f(u) = 0$] .

الفصـــل الخامـــس

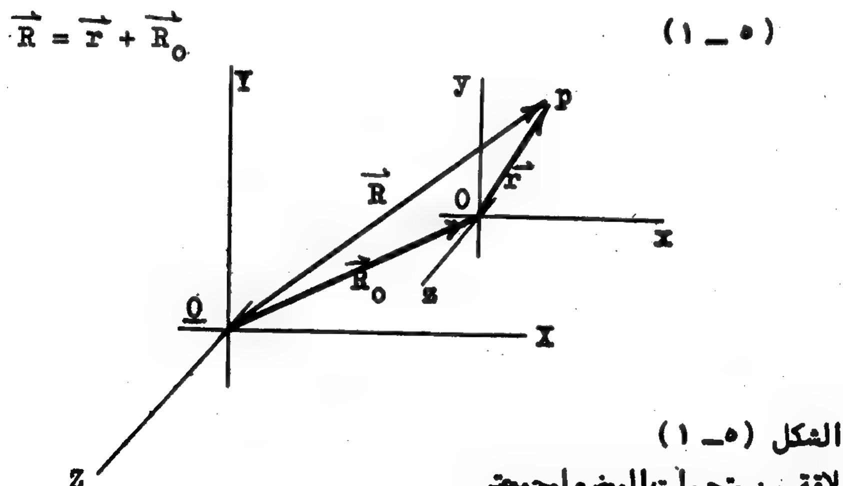
حركة المحاور المرجعيـــة Moving Reference Systems

من الافضل ، في اغلب الاحيان استخدام محاور متحركة لوصف حركـة جســيم • فبالرغم من حركة الارض ودورانها مثلا يفضل استخدام محاور مثبتــه فيها لدراســة حركـة القذيفـة •

٥ـ١) حركة المحاور الانتقالية Translation of the Coordinate System

ان حركة المحاور الانتقالية هي ابسط انواع الحركات• ففي الشكل (٥ـ١) تمثل $\underline{O}XYZ$ المحاور الاساسية (فرضت ثابتة) و $\underline{O}xyz$ المحاور المتحركة• وفي حالـة الحركة الانتقالية تبقى المحاور المتعاقبة $\underline{O}X$ و $\underline{O}x$ وهلم جرا ، متوازية• فاذا كـان $\vec{R}$ يمثل متجه موضع الجسيم P في المحاور الاساسية او الثابتة هو $\vec{r}$ فـي المحاور المتحركة ، وكانت $\vec{R}_0$ تمثل ازاحة نقطة الاصل المتحركة $\underline{O}O$ • اذن

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{R}_0 \qquad (٥ـ١)$$



الشكل (٥ـ١)
العلاقة بين متجهات الموضع لمجموعتي محاور ، يتحرك كل منهما حركـــة انتقالية محضة بالنسبة للآخـــر

عند اخذ مشتقة الزمن الاولى والثانية، نحصل على متجهي السرعة والتعجيل، اى

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{V}_0 \qquad (٥ _ ٢)$$

$$\vec{A} = \vec{a} + \vec{A}_0 \qquad (٥ _ ٣)$$

حيث $\vec{V}_0$ و $\vec{A}_0$ يمثلان سرعة وتعجيل نقطة الاصل المتحركة على التتالي و $\vec{a}, \vec{v}$ سرعة وتعجيل الجسيم P في المحاور المتحركة على التتالي .

في الحالة الخاصة ، عندما تكون المحاور المتحركة غير معجلة، اى $\vec{A}_0 = 0$

عندئذ $\vec{A} = \vec{a}$

اى ان، التعجيل متساو في مجموعتي المحاور، وهذه تصح فقط في حالة انعدام الحركة الدورانية في المحاور المتحركة. سوف ندرس موضوع الحركة الدورانية في البند (٥ _ ٣) القادم.

٥_ ٢) القوى الزائفة Inertial Forces

اذا فرضنا ان قانون نيوتن الثاني

$$\vec{F} = m\vec{A}$$

يصح في المحاور الاساسية، عندئذ ، من المعادلة (٥_٣) ، معادلة الحركة في المحاور المتحركة، تكون

$$\vec{F} - m\vec{A}_0 = m\vec{a} \qquad (٥_٤)$$

اذن يمكن اخذ تعجيل المحاور المرجعية $\vec{A}_0$ ، بنظر الاعتبار، وذلك باضافة الحد $-m\vec{A}_0$ الى القوة $\vec{F}$. وسوف نسمي هذا بالحد الزائف inertial term.

فاذا رغبنا ، فيمكننا كتابة

$$"\vec{F}" = m\vec{a} \qquad (٥ _ ٥)$$

لمعادلة الحركة في المحاور المتحركة ، اذا ادخلنا الحد الزائف كجزء من القـــوة " $\vec{F}$ " . وهذا الحد لم ينتج من تصادم الاجسام بعضها مع بعض، كما هـــي الحالة في القوى الاعتيادية، ولكنه ينجم من اختيار محاور مرجعية . والمحاور المرجعية النيوتونية، كما شرحت في الفصل الثالث ، هي بالتعريف تلك المحاور التي لاتحتـــوى معادلة الحركة فيها على حدود زائفة .

تسمى بعض الاحيان الحدود الزائفة في معادلة الحركة بالقوى الزائفــة او القـــوى الخيالية . على اية حال، اذا كان هناك من يرغب ان يسميها قوى فهذا في الحقيقــة مصطلح فني . ومهما يكن، تظهر هذه الحدود عند استخدام محاور معجلة لوصـــف حركــة جسيم .

مثــال

قالب خشبي موضوع على طاولة افقيــة خشنة . فاذا عجلت الطاولة باتجاه افقـــي ، فما هي الشروط التي سينزلق بموجبها القالب ؟

لنفرض ان μ تمثل معامل الاحتكاك بين القالب وسطح الطاولة . عندئـــذ تكون لقوة الاحتكاك $\vec{F}$ قيمة عظمى هي μmg ، حيث m هي كتلة القالـــب . وشرط الانزلاق هو ان تتفوق القوة الزائفـــة $-m\vec{A}_0$ على قوة الاحتكاك ، حيث $\vec{A}_0$ يمثل تعجيل الطاولة . اذن ، شرط الانزلاق هو

$$|-m\vec{A}_0| > \mu mg$$

او

$$A_0 > \mu g$$

٥ ـ ٣) الحركة العامة للمحاور

General Motion of the Coordinate System

لنعتبر الان الحالة التي تتحرك فيها المحاور المرجعية حركة انتقاليـــة ودورانية على حد سواء ، بالنسبة الى المحاور النيوتونية . لنمثل كالسابق متجه موضع الجسيم في المحاور المرجعية بالرمز $\vec{R}$ ، وفي المحاور المتحركة

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z \qquad (٥ـ٦)$$

عندئذ اذا كان $\vec{R}_o$ يمثل متجه موضع نقطة الاصل المتحركة كما هو مبين في الشكل (٥ـ٢) ، نحصل على

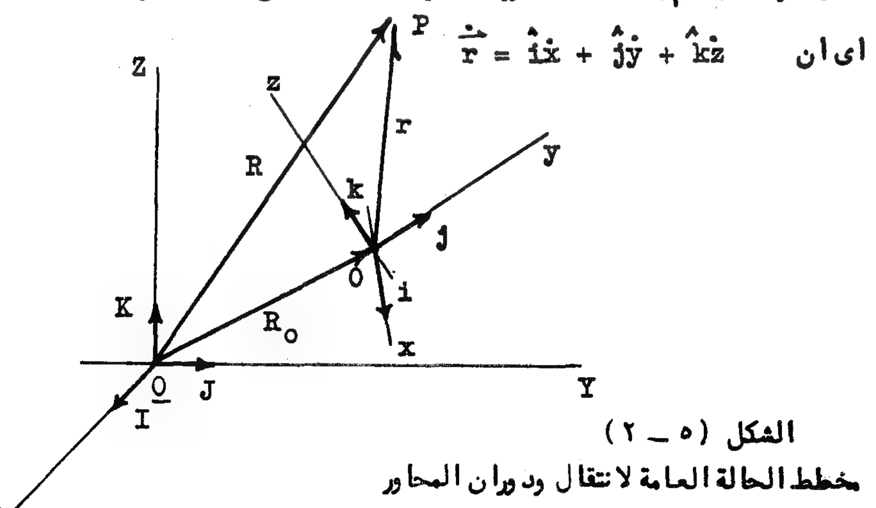
$$\vec{R} = \vec{R}_o + \vec{r} = \vec{R}_o + \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z \qquad (٥ـ٧)$$

وبتفاضلها بالنسبة للزمن نجد ان

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}_o + \hat{i}\dot{x} + \hat{j}\dot{y} + \hat{k}\dot{z} + x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt} \qquad (٥ـ٨)$$

الكميـة $\hat{i}\dot{x} + \hat{j}\dot{y} + \hat{k}\dot{z}$

تمثل سرعة الجسيم بالنسبة للمحاور المتحركة . دعنا نسمي هذه السرعة $\dot{\vec{r}}$ ، اي ان $\dot{\vec{r}} = \hat{i}\dot{x} + \hat{j}\dot{y} + \hat{k}\dot{z}$



الشكل (٥ ـ ٢)
مخطط الحالة العامة لانتقال ودوران المحاور

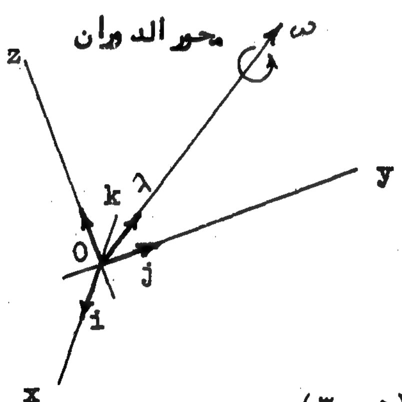
سوف نستخدم نفس الرموز لما تبقى من هذا الفصل ، اى ان النقطة التي فوق المتجـــه تعني مشتقة ذلك المتجـه بالنسبة للزمن في المحاور الدائرة • الحدود الثلاثة التاليـــة

$$x \frac{d\hat{i}}{dt} + y \frac{d\hat{j}}{dt} + z \frac{d\hat{k}}{dt}$$

تمثل السرعة الناشئة من دوران المحاور $Oxyz$.

لنمثل اتجاه محور الدوران في المحاور $Oxyz$ بالوحدة المتجهـــــه λ (الشكل ٥ ــ ٣) ، والانطلاق الزاوى للدوران حول هذا المحور بالرمــز ω • وسوف نسمى حاصل الضرب $\lambda\,\omega$ بالسرعة الزاوية للمحاور الدائرة ، اى يمكننا كتابــــة

$$\vec{\omega} = \omega\,\vec{\lambda} \qquad (٥ _ ٩)$$



الشـــكل (٥ ــ ٣)
متجه السرعة الزاوية للمحـــاور
الدائـــــــــرة

ويعين اتجاه متجــه السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ بقاعدة اليد اليمنى ، كما هو مبين في الشكل •

لايجاد $d\hat{i}/dt,\ d\hat{j}/dt,\ d\hat{k}/dt$ بدلالة $\vec{\omega}$ ، افرض الشـــــكل (٥ ــ٤) • الذى يوضح التغيير $\Delta\hat{i}$ للوحدة المتجهة $\hat{i}$. (حذفت المتجهـــات

$\hat{k}, \hat{j}$ للوضوح) • من الشكل نرى ان مقدار $\Delta \hat{i}$ يساوى

$$|\Delta \hat{i}| \simeq (\sin \phi)\ \Delta \theta$$

حيث $\Delta \theta$ تمثل مقدار دوران المحاور $0xyz$ الذى يحدث في فترة زمنية معينة Δt ، ϕ الزاوية بين $\hat{i}$ ، $\vec{\omega}$ • اذن

$$\left|\frac{d\hat{i}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\Delta \hat{i}}{\Delta t}\right| = (\sin \phi)\ \frac{d\theta}{dt} = \omega \sin \phi$$

الشكل (٥ ـ ٤)
التغيير في الوحدة المتجهة $\hat{i}$
بسبب دوران المحاور

ولكن $\Delta \hat{i}$ عمودى على كل من $\vec{\omega}$ ، $\hat{i}$ • وبناء على ذلك يمكننا التعبير عن $d\hat{i}/dt$ بالضرب الاتجاهي للكميتين $\vec{\omega}$ و $\hat{i}$ • اى

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i} \qquad (٥ ـ ١٠)$$

وبالتماثل

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j} \qquad (٥ ـ ١١)$$

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k} \qquad (٥ ـ ١٢)$$

اذ ن يمكننا التعبير عن ذلك الجزء من السرعة الناتجة من د وران المحاور كمـــا يلـــي

$$x \frac{d\hat{i}}{dt} + y \frac{d\hat{j}}{dt} + z \frac{d\hat{k}}{dt} = x(\vec{\omega} X \hat{i}) + y(\vec{\omega} X \hat{j}) + z(\vec{\omega} X \hat{k})$$
$$= \vec{\omega} X (\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)$$
$$= \vec{\omega} X \vec{r} \qquad (٥ - ١٣)$$

ووفقا لذلك ، تصبح المعادلة (٥ ـ ٨) على الشكل التالى

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} X \vec{r} + \vec{V_o} \qquad (٥ - ١٤)$$

تعبر المعادلة المذكورة اعلاه عن العلاقة بين مشتقات الزمن لمتجهي موضع جســـم متحرك في نظامي محاور ، الاول اعتبر ثابتا والثاني يتحرك حركة انتقالية ويدور . ظهـــر الحد $\vec{V_o}$ بسبب الحركة الانتقالية للمحاور المتحركة فقط . كما انـه لايظهر في حالـة الحركة الدورانية المحضة .

عند اعتبار الحالة العامة لاى متجـه مثل $\vec{q}$ سنرى بعد اجراء مناقشـــات مماثلة للمذكورة اعلاه ، ان مشتقة $\vec{q}$ بالنسبة للزمن هي

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \dot{\vec{q}} + \vec{\omega} X \vec{q} \qquad (٥ - ١٥)$$

حيث $\dot{\vec{q}}$ تمثل معدل التغيير الزمني للمتجــه $\vec{q}$ في المحاور الدائرة ، وهـــي تساوى الكمية $\hat{i}\dot{q}_x + \hat{j}\dot{q}_y + \hat{k}\dot{q}_z$. والضرب الاتجاهي $\vec{\omega} X\vec{q}$ يمثل معدل التغيــر الزمنــي للمتجــه q الناتج من دوران المحاور ، اى

$$q_x (d\hat{i}/dt) + q_y (d\hat{j}/dt) + q_z (d\hat{k}/dt).$$

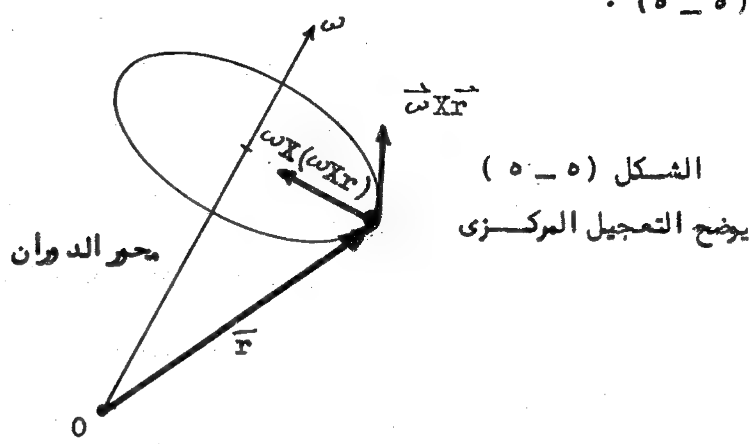
لنطبق المعادلة (٥ ـ ١٥) لايجاد العلاقة بين متجهات التعجيـــــل .

افرض ان q تساوى الكمية $\frac{d\vec{R}}{dt} - \vec{V}_o = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ عندئذ نحصل على العلاقة التالية ــ

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} + 2\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \vec{A}_o \qquad (٥ ــ ١٦)$$

وقد تركت الخطوات كتمرين . الحد الاول في الجانب الايمن من المعادلة يمثل تعجيل الجسيم في المحاور المتحركة . اما الحدود الثلاث الاخرى فهي تمثل الحدود الدورانية لتعجيل الجسيم كما تلاحظ في المحاور الثابتة . والحد الاخير هو تعجيل نقطة اصل المحاور المتحركة .

ويسمى الحد $2\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}$ بالتعجيل الكوريولى " Coriolis" . والحد $\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$ بالتعجيل المستعرض Transverse . والحد الاخير $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ بتعجيل الجذب المركزى " Centripetal " ويتجه دائماً نحو محور الدوران ويكون عموديا عليه ، كما هو مبين في الشكل (٥ ــ ٥) .



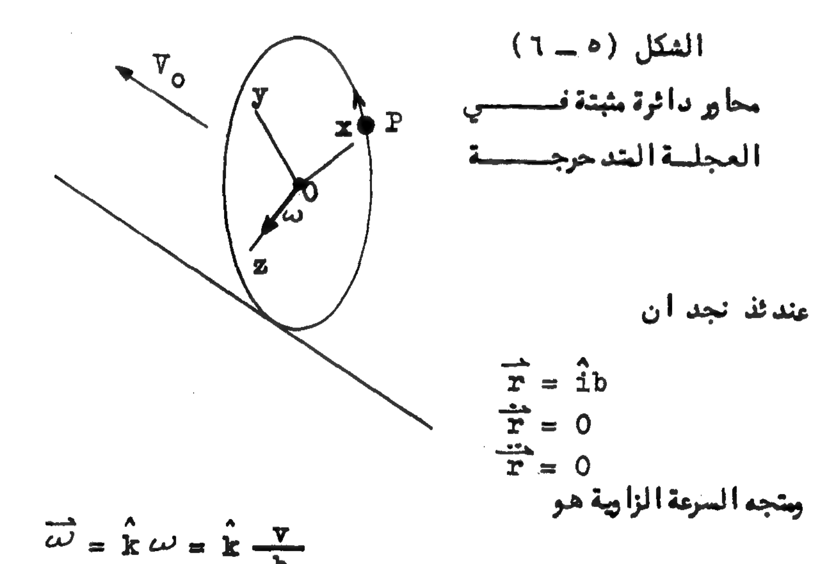
الشكل (٥ ــ ٥)
يوضح التعجيل المركزى

امثلــــــــــة

١ــ عجلة نصف قطرها b تتدحرج على الارض بانطلاق امامي ثابت مقداره v٠

جد التعجيل لاى نقطة على محيط العجلة بالنسبة للارض ٠

لنتخذ محاور مثبتــة في العجلة الدائرة ، ولنفرض ان نقطة الاصــل المتحركــة في مركز العجلة ، والمحور ــ x يمر من النقطة التي نود حساب تعجيلها كما هـــو موضح في الشكل (٥ ــ ٦) ٠



الشكل (٥ ــ ٦)

محاور دائرة مثبتة فـــي العجلـة المتدحرجـــة

عندئذ نجد ان

$$\vec{r} = \hat{i}b$$
$$\dot{\vec{r}} = 0$$
$$\ddot{\vec{r}} = 0$$

ومتجه السرعة الزاوية هو

$$\vec{\omega} = \hat{k}\,\omega = \hat{k}\,\frac{v}{b}$$

للمحاور المختارة المبينة ٠ اذن تتلاشى جميع حدود التعجيل في المعادلة الجبريـــة ما عدا الحد الجذب المركزى ٠ وهو كما يلي ــ

$$\vec{A} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \hat{k}\,\omega \times (\hat{k}\omega \times \hat{i}b)$$
$$= \frac{v^2}{b}\,\hat{k} \times (\hat{k} \times \hat{i})$$
$$= \frac{v^2}{b}\,\hat{k} \times \hat{j}$$
$$= \frac{v^2}{b}\,(-\hat{i})$$

اذن مقدار $\vec{A}$ يساوى v^2 / b ويتجه دائما نحو مركز العجلة المتدحرجة

٢ــ دراجة هوائية تسير بانطلاق ثابت على طريق منحن نصف قطره ρ .

ما تعجيل اعلى نقطة ، لأى من العجلتين ؟

لنفرض ان v تمثل انطلاق الدراجة الهوائية و b نصف قطر العجلة .

للنختار محاور بحيث تكون نقطة اصلها في مركز العجلة ويكون المحور x افقيا متجها

نحو مركز انحناء الطريق C . والمحور ــ z يكون عموديا كما هو واضح من الشكل

(٥ ــ ٧) . اذن تدور المحاور $Oxyz$ بسرعة زاوية هي

$$\vec{\omega} = \hat{k}\,\frac{v}{\rho}$$

وتعجيل نقطة الاصل المتحركة هو

$$\vec{A}_o = \hat{i}\,\frac{v^2}{\rho}$$

الشكل (٥ ــ ٧)
عجلة تتدحرج على طريق منحن

لما كانت كل نقطة على العجلة تتحرك بدائرة نصف قطرها b بالنسبة الى نقطة الاصل المتحركة ، فالتعجيل في المحاور $Oxyz$ لاية نقطة على العجلة يتجه نحو O ويكون مقداره v^2 / b . لذلك ، نحصل في المحاور المتحركة على

$$\ddot{\vec{r}} = -\hat{k}\,\frac{v^2}{b}$$

للنقطة التي في اعلى العجلة . كذلك ، تكون سرعة هذه النقطة في المحاور المتحركة على

$$\dot{\vec{r}} = -\hat{j}v$$

اذن ، يصبح التعجيل الكوريولي

$$2\,\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} = 2\left(\frac{v}{\rho}\,\hat{k}\right)\times(-\hat{j}v) = 2\,\frac{v^2}{\rho}\,\hat{i}$$

لما كانت السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ ثابتة ، فالتعجيل المستعرض يكون صفرا .
كذلك تعجيل الجذب المركزى يكون صفرا ، لأن

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \frac{v^2}{\rho^2}\,\hat{k}\times(\hat{k}\times b\hat{k}) = 0$$

اذن التعجيل الكلي في اعلى نقطة للعجلة هو

$$\vec{A} = 3\,\frac{v^2}{\rho}\,\hat{i} - \frac{v^2}{b}\,\hat{k}$$

٥ ـ ٤) ديناميك جسيم في محاور دائرة

Dynamics of a Particle in a Rotating Coordinate System

لما كانت المحاور الثابتة قد اعتبرت محاور نيوتونيه ، عندئذ تكون المعادلة الاساسية للحركة هي

$$\vec{F} = m\,\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

ووفقا للمعادلة (٥ ـ ١٦) ، يمكننا الان كتابة معادلة الحركة بدلالة المحاور المتحركة كما يلي

$$\vec{F} - m\vec{A}_o - 2m\,\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = m\ddot{\vec{r}} \qquad (٥ ـ ١٧)$$

لقد رتبت الحدود بشكل يظهر القوى الزائفة مضافة الى القوى الفيزيائية "$\vec{F}$" وأعطيت الحدود الزائفة الاسماء التالية ـ

القوة الكوريولية $\vec{F}_{cor} = -2m\,\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$

القوة المستعرضة $\vec{F}_{trans} = -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$

القوة النابذة $\vec{F}_{cent} = -m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

القوة المتبقية $m\vec{A}_o$ ـ هي الحد الزائف الناشئ عن الحركة الانتقالية للمحاور ، والذي سبق بحثه في البند (٥ ـ ٢) .

مرة اخرى ، كما في الشرح السابق للحد الزائف $-m\vec{A}_o$ ، يمكننا كتابة معادلة الحركة في المحاور المتحركة كما يلي

$$"\vec{F}" = m\ddot{\vec{r}} = m(\hat{i}\ddot{x} + \hat{j}\ddot{y} + \hat{k}\ddot{z})$$

لذلك تصبح " القوة " الكلية

$$"\vec{F}" = \vec{F} + \vec{F}_{cor} + \vec{F}_{trans} + \vec{F}_{cent} - m\vec{A}_o \qquad (٥ ـ ١٨)$$

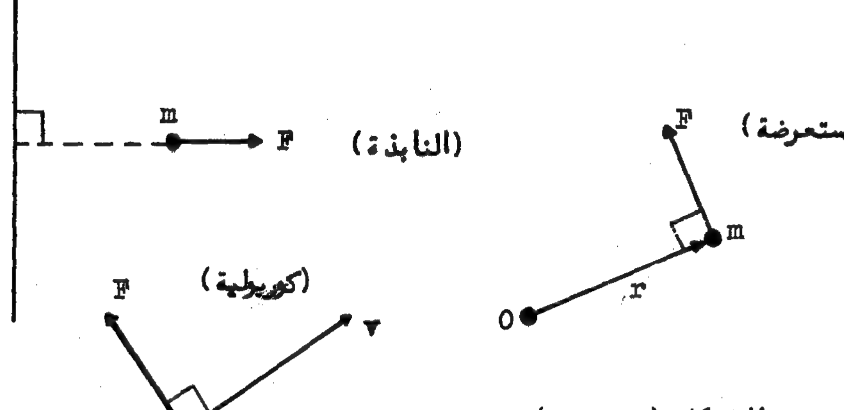
جميع الحدود الاربعة الزائفة في الجانب الايمن من المعادلة تعتمد على نوع المحاور التي وصفت فيها الحركة . وهي تنشأ من خواص استمرارية للمادة بدلا من تواجد اجسام اخرى .

للقوة الكوريولية اهمية خاصة . وتظهر فقط عندما يتحرك الجسيم في محاور دائرة . واتجاهها يكون دائما عموديا على متجه سرعة الجسيم في المحاور المتحركة . لذلك تبدو القوة الكوريولية وكانها تحرف جسيما متحركا باتجاه عمودي على اتجاه حركته . وهذه القوة مهمة ، مثلا ، في حساب مسار القذيفة . وتسبب التأثيرات الكوريولية دوران الهواء حول مساحات الضغط العالي والواطئ على سطح الكرة الارضية . لذلك في حالة المساحات ذات الضغط العالي يحاول الهواء التدفق الى

الخارج والى اليمين في نصف الكرة الارضية الشمالي ، بحيث يكون الدوران باتجاه عقرب الساعة . والامر على العكس في نصف الكرة الارضية الجنوبي .

وتظهر القوة المستعرضة اذا كان للمحاور الدائرة تعجيل زاوي فقط . وسميت هذه القوة بالمستعرضة لانها تكون دائما عمودية على متجه نصف القطر $\vec{r}$.

واخيرا تنشأ القوة النابذة ، وهي قوة مألوفة ، من الدوران حول محور ، وتتجه دائما نحو الخارج مبتعدة عن محور الدوران وتكون عمودية عليه . فاذا كانت θ تمثل الزاوية بين متجه نصف القطر $\vec{r}$ ومتجه الدوران $\vec{\omega}$ ، عندئذ ، يكون مقدار القوة النابذة هو $mr\omega^2 \sin\theta$ أو $m\rho\omega^2$ حيث ρ يمثل المسافة العمودية بين الجسيم المتحرك ومحور الدوران . وهذه القوى المتنوعة قد وضحت في الشكل (٥ ــ ٨) .



الشكل (٥ ــ ٨)
يوضح القوى الزائفة الناشئة من دوران المحاور . وقد رسمت القوى بصورة منفصلة للوضوح

امثلــــــــة

١ـ تزحف بقـة الى الخارج بانطلاق ثابت مقداره v على شعاع دولاب عجلـة يدور بسرعة زاوية ثابتة حول محور عمودى • جد جميع القوى المؤثرة على البقـــــــة •

لنختر اولا • محاور مثبتـة بالدولاب ولنفرض ان المحور ـ x يتجـه على طـــول شعاع الدولاب • عندئذ تكون

$$\vec{r} = \hat{i}x = \hat{i}vt$$

$$\dot{\vec{r}} = \hat{i}\dot{x} = \hat{i}v$$

$$\ddot{\vec{r}} = 0$$

هذه معادلات الحركة للبقة كما توصف في المحاور الدائرة • فاذا اخترنـا المحـــور ـ z شاقوليا • نحصل على

$$\vec{\omega} = \hat{k}\omega$$

عندئذ تكون القوى المتنوعة على النحو التالى ـ

القــوة الكوريولية

$$-2m\,\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} = -2m\,\omega\,v(\hat{k}\times\hat{i}) = -2m\,\omega v\hat{j}$$

القــوة المستعرضة

$$-m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} = 0 \quad (\omega = \text{ثابتــة})$$

القــوة النابـــذة

$$-m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times r) = -m\omega^2\left[\hat{k}\times(\hat{k}\times\hat{i}x)\right]$$

$$= -m\omega^2(\hat{k}\times\hat{j}x)$$

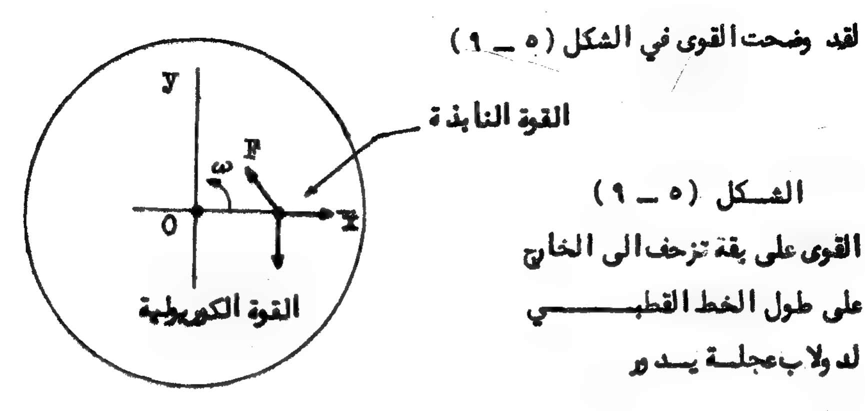
$$= m\omega^2 x\hat{i}$$

اذن المعادلة (٥ ـ ١٧) تصبح

$$\vec{F} - 2m\omega v\hat{j} + m\omega^2 x\hat{i} = 0$$

هنا القوة $\vec{F}$ هي القوة الحقيقية التي يسلطها شعاع الدولاب علـى البقــــــة •

لقد وضحت القوى في الشكل (٥ ـ ٩)



الشكل (٥ ـ ٩)
القوى على بقة تزحف الى الخارج على طول الخط القطبي لدولاب عجلة يدور

٢ـ في السؤال السابق ، جد المسافة التي يمكن ان تزحفها البقة قبل ان تبدأ بالانزلاق ، اذا علمت ان معامل الاحتكاك بين البقة والشعاع هو μ .

لما كانت لقوة الاحتكاك $\vec{F}$ قيمة عظمى هي μmg ، سيبدأ الانزلاق عندما

$$|\vec{F}| = \mu mg$$

او

$$\left[(2m\omega v)^2 + (m\omega^2 x)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \mu mg$$

وعند حل هذه المعادلة للمسافة x ، نجد ان

$$x = \frac{(\mu^2 g^2 - 4\omega^2 v^2)^{\frac{1}{2}}}{\omega^2}$$

وهي المسافة التي تزحفها البقة قبل ان تنزلق .

٥ـ٥) تاثيرات دوران الارض Effects of the Earth's Rotation

لنطبق النظرية التي بحثت في البنود السابقة لمحاور تتحرك مع الارض . لما كان الانطلاق الزاوي لدوران الارض يساوي 2π زاوية قطرية في اليوم ، او حوالي $٧,٣ \times ١٠^{-٥}$ زاوية نصف قطرية في الثانية ، قد نتوقع ان هذه التاثيرات للدوران صغيرة نسبيا . وبالرغم من ذلك ، فان الانتفاخ الاستوائي تولد بسبب دوران الارض

حول نفسها وكما هو معروف فان نصف قطر الارض الاستوائي اكبر من نصف قطرهـــــا القطبي بحوالي ١٣ ميـل ٠

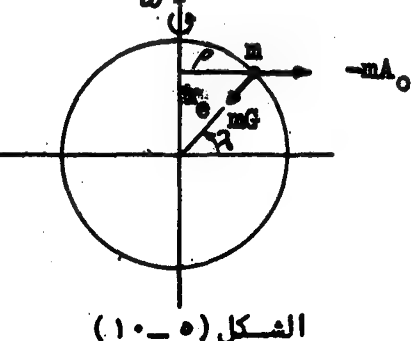
التأثيرات الستاتيكية ـ شاقول البناء

Static Effects. The Plumb Line

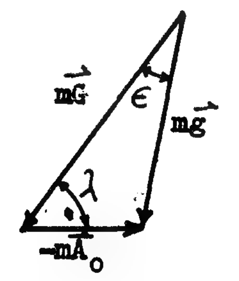
لنفرض اولا جسيم في حالة السكون على سطح الكرة الارضية ٠ ولكي نعطي صورة واضحة سنعتبر الجسيم يمثل الكرة التي في نهاية شاقول البناء ٠ لنختر نقطة اصل محاورنـــا في موضع الكرة ، بحيث تكون $\vec{r} = 0$ ٠ الان ، يتجـه متجـه السرعة الزاويه $\vec{\omega}$ باتجاه محور الارض وهو تقريبا ثابت ، اى ان ، التعجيل الزاوى $\dot{\vec{\omega}}$ يساوى صفرا ٠ عندئـذ تتلاشى جميع حدود معادلة الحركة (٥ ـ ١٧) للحالة الستاتيكية ماعدا القوة المسلطـة $\vec{F}$ والحد الزائف $-m\vec{A}_0$ وبذلك تكون النتيجة

$$\vec{F} - m\vec{A}_0 = 0 \qquad (٥ ـ ١٩)$$

وتعطي القوة $\vec{F}$ بالمجموع الاتجاهي للقوتين : قـوة جذب الارض الحقيقيـة (التي سوف نسميها $m\vec{G}$) والشد العمودى لخيط شاقول البناء (الذى سوف نمثله بـ $-m\vec{g}$) ٠ وقد وضحت هاتين القوتين بالشكلين (٥ ـ ١٠) و (٥ ـ ١١) ٠ عندئـذ نحصل على



الشـكل (٥ ـ ١٠)
القوى النابذه والجذبية على جسـم على سطح الكـرة الارضيـــة



الشـكل (٥ ـ ١١)
مثلث المتجهات لتعريف الكمية $m\vec{g}$

$$\vec{mG} - \vec{mg} - \vec{mA_o} = 0 \qquad (٥-٢٠)$$

او

$$\vec{g} = \vec{G} - \vec{A_o}$$

ويتجه المتجه $\vec{mG}$ نحو مركز الكرة الارضية . التعجيل $\vec{A_o}$ يمثل لتعجيل الجذب المركزى لنقطة اصل محاورنا المتحركة . ومقداره هو $\omega^2\rho$ او $(r_e \cos\lambda)\omega^2$ حيث r_e يمثل نصف قطر الكرة الارضية و λ هي زاوية خط العرض مقاسة من مركز الارض geocentric latitude ومقدار الحد $-\vec{mA_o}$ (القوة النابذة) يساوى $(mr_e \cos\lambda)\omega^2$. وهو يتجه الى الخارج ويكون عموديا على محور الارض كما هو مبين في الشكل (٥-١٠) . لذلك لا يؤشر خط ميزان البناء نحو مركز الكرة الارضية تماما ، وانما ينحرف بزاوية صغيرة ϵ . ومن المعادلة (٥-٢٠) يمكن تمثيل المتجه $\vec{mg}$ بالرسم ، كضلع ثالث للضلعين الآخرين $\vec{mG}$ ، $-\vec{mA_o}$ (الشكل ٥-١١) . وبتطبيق قانون الجيوب ، نحصل على

$$\frac{\sin\epsilon}{mr_e\omega^2\cos\lambda} = \frac{\sin\lambda}{mg}$$

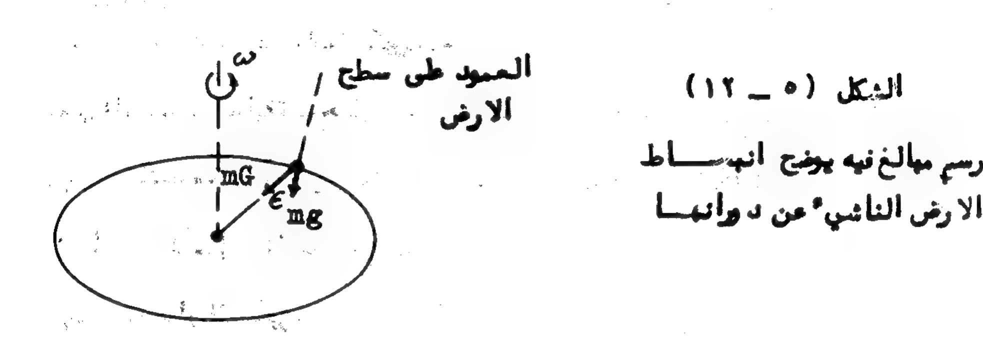
او ، لما كانت ϵ صغيرة ، فاننا نحصل على

$$\sin\epsilon \simeq \epsilon = \frac{r_e\omega^2}{g}\sin\lambda\cos\lambda = \frac{r_e\omega^2}{2g}\sin 2\lambda \qquad (٥-٢١)$$

لذلك تتلاشى ϵ في خط الاستواء $(\lambda = 0)$ وفي القطبين $(\lambda = \mp 90^\circ)$ ، كما توقعنا . ويكون الانحراف الاعظم لخط شاقول البناء عن العمود . الحقيقي . عندما تكون $\lambda = 45^\circ$ حيث

$$\epsilon_{max} = \frac{r_e\omega^2}{2g} \simeq 1.7 \times 10^{-3} \text{ radian} \simeq \frac{1}{10} \text{ degree}$$

وشكل الارض يجعل خط شاقول البناء عموديا على سطحها في اية نقطة ، والمقطع العرضي الناتج يكون تقريبا قطعا ناقصا (الشكل ٥ ـ ١٢) في الشرح المذكور اعلاه



الشكل (٥ ـ ١٢)

رسم مبالغ فيه يوضح انبساط الارض الناشيء عن دورانها

فرضنا ان قوة الجذب $\vec{mG}$ ثابتة وتتجه نحو مركز الارض . ان هذا الفرض لايصح تماما لان الارض ليست كرة حقيقية . كذلك تؤثر قليلا ، الاختلافات المحلية ، كالجبال والترسبات المعدنية وهلم جرا على اتجاه شاقول البناء .

التاثيرات الديناميكية ـ حركة القذيفة Dynamic Effects. Motion of a Projectile

يمكن كتابة معادلة الحركة (٥ ـ ١٧) على النحو التالي

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + (m\vec{G} - m\vec{A}_o) - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

حيث $\vec{F}$ تمثل اي قوى مسلطة باستثناء قوة الجذب الارضي . ولكن ، من الحالة الستاتيكية التي شرحناها سابقا ، التركيب $m\vec{G} - m\vec{A}_o$ سمي $m\vec{g}$ ، اذن يمكننا كتابة معادلة الحركة على النحو التالي

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

لنفرض حركة القذيفة . اذا اهملنا مقاومة الهواء ، عندئذ $F = 0$. اضف الى

ذلك الحد $m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ ـ يكون صغيرا جدا اذا قورن بالحدود الاخرى) لذلك سنهمله • اذن تختصر معادلة الحركة الى

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} \qquad (٥ _ ٢٢)$$

حيث يمثل الحد الاخير القوة الكوريولية •

ولحل المعادلة السابقة سنختار اتجاهات المحاور $Oxyz$ بحيث يكون المحور ـ z عموديا (باتجاه خط شاقول البناء) • والمحور ـ x متجها نحو الشرق • والمحور ـ y مؤشرا نحو الشمال (الشكل (٥ ـ ١٣) •

وبهذا الاختيار للمحاور • نحصل على

$$\vec{g} = -\hat{k}g$$

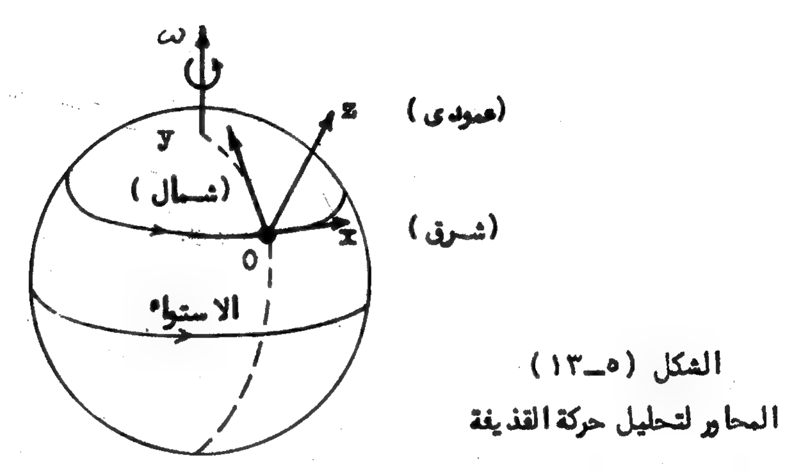
و

$$\vec{\omega} = \omega_x\hat{i} + \omega_y\hat{j} + \omega_z\hat{k} = (\omega\cos\lambda)\hat{j} + (\omega\sin\lambda)\hat{k}$$

اذن

$$\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(\omega\dot{z}\cos\lambda - \omega\dot{y}\sin\lambda) + \hat{j}(\omega\dot{x}\sin\lambda) + \hat{k}(-\omega\dot{x}\cos\lambda) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥ _ ٢٣)$$



الشكل (٥ـ١٣)
المحاور لتحليل حركة القذيفة

وعند التعويض عن $\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$ في المعادلة (٥ ـ ٢٢) واختصار m من كل حـد ثم موازنة المركبات بين طرفي المعادلة نجد ان مركبات المعادلات التفاضلية للحركـة هـي

$$\ddot{x} = -2\omega(\dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda) \qquad (٥ ـ ٢٤)$$

$$\ddot{y} = -2\omega(\dot{x} \sin \lambda) \qquad (٥ ـ ٢٥)$$

$$\ddot{z} = -g + 2\omega\dot{x} \cos \lambda \qquad (٥ ـ ٢٦)$$

هذه المعادلات هي ليست من النوع القابل للفرز ، ولكن يمكننا ان نكامل مـرة واحدة بالنسبة الى t للحصول على

$$\dot{x} = -2\omega (z \cos \lambda - y \sin \lambda) + \dot{x}_0 \qquad (٥ ـ ٢٧)$$

$$\dot{y} = -2\omega x \sin \lambda + \dot{y}_0 \qquad (٥ ـ ٢٨)$$

$$\dot{z} = -gt + 2\omega x \cos \lambda + \dot{z}_0 \qquad (٥ ـ ٢٩)$$

حيث ثوابت التكامل $\dot{z}_0$ ، $\dot{y}_0$ ، $\dot{x}_0$ تمثل المركبات الابتدائية للسرعة . وقـد تعوض قيم $\dot{z}$ ، $\dot{y}$ من المعادلتين الاخيرتين السابقتين في المعادلة (٥ ـ ٢٤) .

والنتيجة تكون

$$\ddot{x} = 2\omega g t \cos\lambda - 2\omega(\dot{z}_0 \cos\lambda - \dot{y}_0 \sin\lambda) \qquad (٥ - ٣٠)$$

حيث اهملت الحدود التي تحتوى على ω^2 ، والان نكامل مرة اخرى لنحصل على

$$\dot{x} = \omega g t^2 \cos\lambda - 2\omega t(\dot{z}_0 \cos\lambda - \dot{y}_0 \sin\lambda) + \dot{x}_0$$

و

$$x = \tfrac{1}{3}\omega g t^3 \cos\lambda - \omega t^2(\dot{z}_0 \cos\lambda - \dot{y}_0 \sin\lambda) + \dot{x}_0 t \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (٥ - ٣١)$$

وقد تعوض قيمة x المذكورة اعلاه في المعادلتين (٥ - ٢٨) و (٥ - ٢٩) ، وعند تكامل المعادلتين الناتجتين نحصل على

$$y = \dot{y}_0 t - \omega \dot{x}_0 t^2 \sin\lambda \qquad (٥ - ٣٢)$$

$$z = -\tfrac{1}{2} g t^2 + \dot{z}_0 t + \omega \dot{x}_0 t^2 \cos\lambda \qquad (٥ - ٣٣)$$

حيث اهملت ، مرة ثانية ، الحدود من مرتبة ω^2 على فرض ان القذيفة كانت في نقطة الاصل في الزمن $t = 0$.

لنفترض بعض الحالات الخاصة . اولا ، اذا سقط جسيم من السكون ($\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$) نحصل على

$$x = \tfrac{1}{3}\omega g t^3 \cos\lambda$$

$$y = 0$$

$$z = -\tfrac{1}{2} g t^2$$

اى ان الجسيم ينحرف نحو الشرق . فاذا سقط شاقوليا مسافة h يكون عندئذ $t^2 \simeq 2h/g$ ، وبذلك يكون الانحراف نحو الشرق

$$\tfrac{1}{3}\omega \cos\lambda \left(\frac{8h^3}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ولما كانت الارض تدور نحو الشرق ، قد نتصور بان الجسيم يجب ان ينحرف نحو الغرب . فهل يستطيع القارئ ان يجد تفسيرا لذلك ؟

كحالة خاصة ثانية ، افرض ان قذيفة قد اطلقت بسرعة عالية باتجاه يقترب من الافق ،

ولنفرض ان هذا الاتجاه هو الشرق • عندئذ

$$\dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0 \quad , \quad \dot{x}_0 = v_0$$

ومن المعادلة (٥ ـ ٣٢) نحصل على ـ

$$y = -\omega v_0 t^2 \sin\lambda$$

وذلك يعني ان القذيفة قد انحرفت نحو اليمين • واذا كانت H المدى الافقـــي • عندئذ $H \simeq v_0 t_1$ ،حيث t_1 يمثل زمن الطيران • وانحراف القذيفـــة نحـو اليمين (لقطع المسافة H شرقا) عندئذ ، تقريبا ، يكون

$$\frac{\omega H^2}{v_0} \sin\lambda$$

ويمكن البرهنة على ان هذا هو مقدار الانحراف ، بغض النظر عن الاتجاه الـــــذي وجهت اليه القذيفة في البداية ، على ان يكون المسار ثابتا •

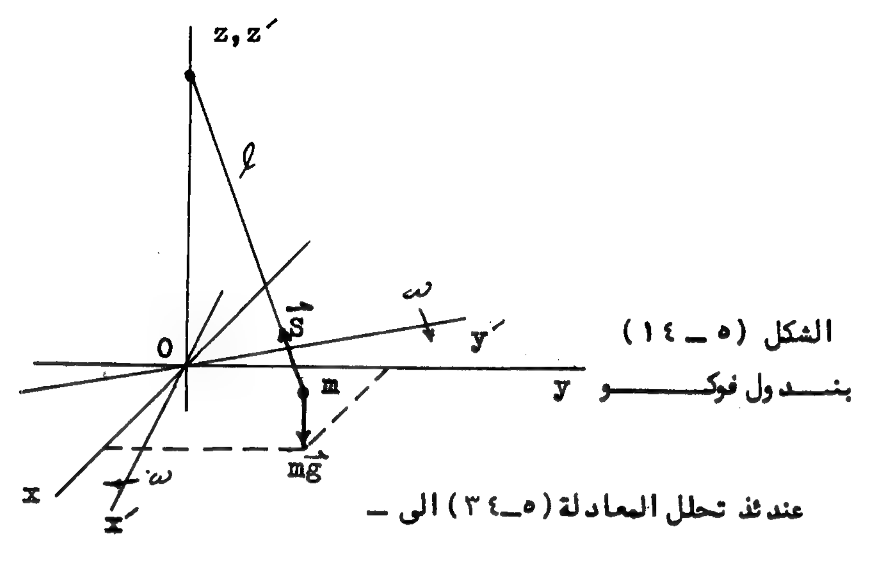
*٥ ـ ٦) بندول فوكـو The Foucault Pendulum

سوف ندرس في هذا البند تاثير دوران الارض على حركة بندول كـــروي • وكالمعالجة التقريبية للبندول الكروي التي ذكرناها في البند (٥ـ٣٢) ، ســـوف نستخدم المحاور المتعامدة • وكما هو مبين في الشكل (٥ـ١٤) ، تكون القـــوة المؤثرة على كرة البندول هي الجمع الاتجاهي للحد الشاقولي $m\vec{g}$ والشد $\vec{S}$ في الوتر • عندئذ تكون المعادلة التفاضلية للحركة

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{S} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \qquad (٥ـ٣٤)$$

حيث اهمل الحد $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ • وقد سبق ان اعطيت مركبـــات الحـــد $\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$ في المعادلة (٥ـ٢٣) • ومركبات y-x للشد $\vec{S}$ هي كما في البنـــد (٤ـ١٤)•

$$S_x = \frac{-x}{\ell} S \qquad S_y = \frac{-y}{\ell} S$$



الشكل (٥ ـ ١٤)
بنـــدول فوكـــــو

عندئذ تحلل المعادلة (٥ـ٣٤) الى ـ

$$m\ddot{x} = \frac{-x}{\ell} S - 2m\omega(\dot{z} \cos\lambda - \dot{y} \sin\lambda) \qquad (٥ـ٣٥)$$

$$m\ddot{y} = \frac{-y}{\ell} S - 2m\omega\dot{x} \sin\lambda \qquad (٥ـ٣٦)$$

$$m\ddot{z} = S_z - mg + 2m\omega\dot{x} \cos\lambda \qquad (٥ـ٣٧)$$

ان الحالة التي تهمنا هي عندما تكون الازاحة عن الشاقول صغيرة بحيث يكـــون الشد $\vec{S}$ تقريبا ، ثابتا ومساويا لـ mg . كذلك، في هذه الحالة، نستطيع اهمـال $\dot{z}$ بالمقارنة مع $\dot{y}$ في المعادلة (٥ـ٣٥) . وعندئذ تعطي حركـة x-y بالمعادلات التفاضلية التالية ـ

$$\ddot{x} = -\frac{g}{\ell} x + 2\omega'\dot{y} \qquad (٥ـ٣٨)$$

$$\ddot{y} = -\frac{g}{\ell} y - 2\omega'\dot{x} \qquad (٥ـ٣٩)$$

حيث $\omega' = \omega \sin\lambda$. وبما يكون من السهولة تصور الحركة الممثلة في المعـادلات التفاضلية المذكورة اعلاه عند تحويلها الى محاور جديدة $0x'y'$ تدور في المستوى xy — بانطلاق زاوي ثابت ω' بالنسبة الى المحاور $0xy$ (الشكل ٥ — ١٤) ومعادلات التحويل هي

$$x = x' \cos \omega' t + y' \sin \omega' t$$

$$y = y' \cos \omega' t - x' \sin \omega' t$$

وعند تعويض قيم $\ddot{x}$, y , $\ddot{y}$ (الناتجة من تفاضل المعادلات المذكورة اعـلاه) في المعادلة (٥ — ٣٩) ، نجد ، بعد الاختصار وتجميع الحدود واهمال الحدود التي تحتوي على ω'^2 ان

$$(\ddot{x}' + \frac{g}{l} x') \cos \omega' t + (\ddot{y}' + \frac{g}{l} y') \sin \omega' t = 0$$

ولما كانت المعادلة السابقة يجب ان تصح لكل قيم t فان كلاً من معامـل الجيـب والجيب تمام يجب ان تساوي صفراً ، اي

$$\ddot{x}' + \frac{g}{l} x' = 0 \qquad \ddot{y}' + \frac{g}{l} y' = 0$$

ان هذه المعادلات التفاضلية ، كما رأينا في البند (٤ — ١٤) ، تمثل الحركـة فـي مسار قطع ناقص . ولما كان قطر القطع الناقص الرئيسي له اتجاه ثابت في المحاور $0x'y'$ لذلك يعاني هذا القطر طوافاً Precession مستقراً باتجاه عقرب السـاعـة (في نصف الكرة الشمالي) بانطلاق زاوي مقداره $\omega' = \omega \sin\lambda$ بالنسبة للمحاور $0xy$. وهذا الطواف يكون طبعاً ، بالاضافة الى الطواف الطبيعي الذي سبق بحثه في البند (٤ — ١٤) . ولكن ، اذا كانت الحركة الابتدائية للبندول في المحاور $0x'y'z$ في مستوى فسوف تبقى في هذا المستوى . (ولكي يبدأ البندول بهذه الطريقـة ، من الضروري سحبه جانبا بواسطة خيط ثم تركه يبدأ من السكون بقطع هـذا الخيط) .

ان زمن ذبذبة طواف البندول هو — $\frac{2\pi}{\omega} = 24\ hr/\sin\lambda$ ، لذلك ، في خط عرض ٤٥° يكون زمن الذبذبة ٣٤ ساعة . لقد وضحت هذه النتيجة لاول مرة من قبل العالم الفرنسي جان فوكو Jean Foucault في باريس سنة ١٨٥١ .

تماريـــن

٥ـ١) نقل شاقول بناء في قطار متحرك . فاذا كانت m تمثل كتلة كرة الشاقـــول ، جد الشد في الخيط وانحرافه عن العمود الموضعي اذا كان (آ) القطـار يتحـرك بتعجيل ثابت a_0 وباتجاه معلوم ، (ب) القطار يتحرك على منحن نصف قطره بانطلاق ثابت v_0 اهمل التاثيرات التي قد تنشأ عن دوران الارض .

٥ـ٢) سيارة تسير بتعجيل ثابت a_0 اذا كان انطلاقها في لحظة معينـــــة v_0 . جد اي نقطة على التاير لها اعظم تعجيل بالنسبة الى الارض ، جد كذلك اتجاه هذا التعجيل ومقداره ..

٥ـ ٣) في حركة الدراجة الهوائية مثال (٢) بند ٥ـ٣ ، ماهو تعجيل اوطأ نقطة فـي العجلـة ؟

٥ ـ ٤) حل مثال (٢) ، بند ٥ ـ٣ ، عندما تكون نقطة اصل المحاور في مركز نصف القطر الدائر والمحور ـ x يمر في مركز العجلة والمحور ـ z عمودياً .

٥ـ٥) حشرة تزحف بانطلاق v في مسار دائري نصف قطره b على قرص حاك دائر ، يدور بسرعة زاوية ثابتة ω . صف الحركة بالنسبة لمحاور مثبتة في القرص الدائــــر . جد التعجيل $\vec{A}$ للحشرة بالنسبة الى الخارج ، وقوة الاحتكاك $\vec{F}$ المؤثرة علـى الحشرة . وبصورة خاصة جد $\vec{A}$ و $\vec{F}$ للحالتين .

$$v = b\omega \quad , \quad v = -b\omega$$

لاحظ في الحالة الأخيرة ، ان الحشرة مستقرة بالنسبة الى الخارج .

٥ـ ٦) طفل يركب دولاب هواء نصف قطره b ويدور بانطلاق زاوي ثابت ω . فاذا كان الطفل يمسك لعبة كتلتها m مربوطة بخيط قصير ، جد الشد في الخيط عندما يكون الطفل في اعلى واوطأ نقطة وفي مستوى مركز دولاب الهواء .

٥ـ ٧) جد مقدار واتجاه القوة الكوريولية المؤثرة على سيارة سباق كتلتها ١٨٠٠ كغم وتسير نحو الشمال بانطلاق ٥٦٠ كم/ ساعة وفي خط عرض ٤٥° شمالا .

٥ ـ ٨) سقط جسيم من ارتفاع ١٠٠ متر، اين سيضرب الارض ؟ افرض λ تساوي ٤٥° شمالا .

٥ ـ ٩) نقل شاقول بناء في طائرة متحركة ، فاذا كانت الطائرة متجهة نحو الشرق بانطلاق v جد الانحراف الزاوي لخيط الشاقول عن العمود الموضعي . ما يجب ان تكون سرعة الطائرة حتى يكون الانحراف مساويا لدرجة واحدة ، افرض λ تساوي ٤٥° شمالا .

٥ ـ١٠) بين ان معدل التغير الزمني لمتجه السرعة الزاوية يكون نفسه في المحاور الثابتة او الدائرة للشكل (٥ ـ٢) اي ، اثبت ان $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}$. هل يصح الشيء نفسه للتعجيل الزاوي ؟ .

٥ـ ١١) اشتق تعبير للمشتقة الثالثة لمتجه الموضع $\frac{d^3\vec{R}}{dt^3}$ بدلالة المركبات في محاور دائرة .

٥ ـ ١٢) اطلقت قذيفة شاقوليا بانطلاق ابتدائي v_0 فاذا اهملت مقاومة الهواء وفرضت g ثابتة ، جد اين تسقط القذيفة عندما تضرب الارض .

٥ـ١٣) بندول كروي طوله ℓ يتحرك بذبذبات صغيرة حول الزاوية المخروطية θ_0.

ماهي القيمة لـ θ_0 التي يختزل فيها الطواف الناشيء عن دوران الارض ، الطواف الطبيعي الذى سبق شرحه في الفصل الرابع ؟ افرض ان θ_0 صغيرة . جد القيمة التقريبية عندما يكون ℓ يساوى ١٠ أمتار و λ تساوى ٤٥ شمالا .

٥ـ١٤) معادلة الحركة التفاضلية لجسيم مشحون ، في مجال كهربائي $\vec{E}$ ومجال مغناطيسي $\vec{B}$ هي

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

في المحاور النيوتونية . اذا نسبت الحركة الى محاور دائرة بسرعة زاوية $(q/2m)\vec{B}$ ، اثبت ان المعادلة تصبح

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E}$$

حيث فرضت $\vec{B}$ صغيرة بحيث يمكن اهمال الحدود من رتبة B^2 . وتعرف هذه النتيجة بنظرية لارمور Larmors Theorem .

الفصـــل الســـادس

القـــوى المركزية والميكانيك الســماوى

Central Forces and Celestial Mechanics

القوة التي يمر خط تاثيرها في نقطة ثابتة او مركز قوة تسمى بالقوة المركزيــــــه Central Force وللقوي المركزيه اهمية اساسية في الفيزياء لانها ، تشمل قــوى مثل قوة جذب الارض وقوى الالكتروستاتيك وغيرها ٠

٦ ـ١) قانون الجاذبيــة The Law of Gravity

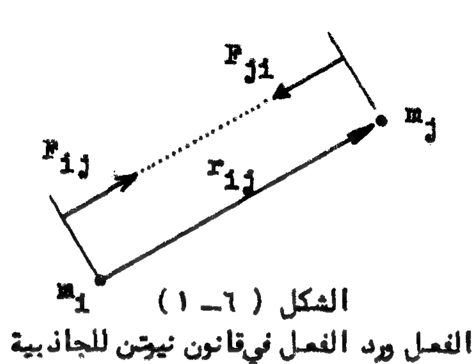
اعلن نيوتن قانون الجاذبية العام سنة ١٦٦٦ ٠ وليس هناك مبالغة اذا قلنــــا بان هذا قد سجل بداية علم الفلك الحديث ، لان قانون الجاذبية العام يفسر حركــة الكواكب السيارة للمنظومة الشمسية وتوابعها ٠ وكذلك النجوم الثنائية او المزدوجــة وحتى المنظومات النجمية ٠ ويمكن صياغة القانون على النحو التالي :ـ

كل جسيم في الكون يجذب كل جسيم آخر بقوة تتغير طرديا مع حاصل ضرب كتلتيهما عكسيا مع مربع المسافة بينهما ٠ وتتجـه القوة على طول المستقيم الواصل بينهمـــا ٠

ويمكننا التعبير عن القانون بجبر المتجهات بالمعادلة التالية ٠

$$\vec{F}_{ij} = G\,\frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}\left(\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}\right) \qquad (٦ـ١)$$

حيث $\vec{F}_{ij}$ تمثل القوة على جسيم i كتلتـه m_i التي يؤثر بها جسيـم j كتلتـه m_j ٠ والمتجـه $\vec{r}_{ij}$ هو المستقيم الذى يبدأ في الجسيم i وينتهـي في الجسيم j ، كما هو مبين في الشكل (١ــ ٦) ٠ ويقضـي قانـــون الفعــل ورد الفعــل ان $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ ٠ وثابت التناســب G ٠ يسمى بثابت الجاذبية العام ٠ وتحسب قيمتـه بدقة في المختبر بقياس القــوة بيـــن جسمين كرويين كتلتاهما معلومتان ٠ والقيمة المقبولـة في الوقـت الحاضـــــر ،



الشكل (٦ـ ١)
الفعل ورد الفعل في قانون نيوتن للجاذبية

كما اوجدتها دار القياسات الوطنية الامريكية هي

$$G = (6.673 \pm 0.003) \times 10^{-8} \ \frac{dyne\ cm^2}{g^2}$$

وتعتمد جميع معلوماتنا الحاضرة عن كتل الاجرام السماوية وضمنها الارض على قيمـــة G.

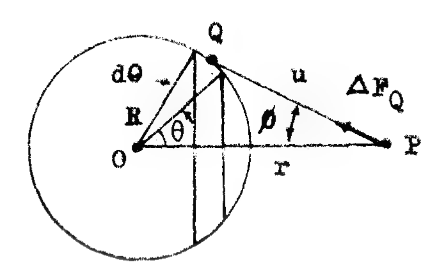
٦ـ٢) قـوة الجذب بين كرة منتظمة وجسيم

Gravitational Force between a Uniform Sphere and a Particle

في البند (٣ـ١١) ، حيث بحثنا حركة الجسيم حر السقوط ، اكدنا على ان قـوة جذب الارض على جسيم فوق سطحها تتناسب عكسيا مع مربع المسافة بين الجسيم ومركـز الكرة الارضية ، اى ان ، الارض تجذب وكأن جميع كتلتها متجمعه في نقطـة واحـدة . وسنبرهن الان على ان هذا يصح لاى جسم كروى منتظم اواى توزيع كروى متماثل للمادة .

افرض اولا قشرة كروية رقيقـة كتلتها M ونصف قطرها R . وافرض ان r المسافة بين مركزها O وجسيم اختبار P كتلتـه m (الشكل (٦ـ٢) . على فرض ان R < r. سوف نقسم القشرة الكروية الى حلقات دائرية عرض كل منها $R \triangle \theta$ حيث ـ كما هـو مبين في الشكل ، ان الزاوية POQ مثلت بالرمز θ و Q تمثل نقطة على الحلقة . لذا يكون محيط الحلقة $2\pi R \sin\theta$ ، وكتلتها $\triangle M$ تساوى

$$\triangle M \simeq \rho\, 2\pi R^2 \sin\theta \triangle \theta$$



الشكل (٦ ـ ٢)
الاحداثيات لحساب مجال الجاذبية لقشرة كروية

حيث ρ تمثل كتلة وحدة مساحة القشرة .

والان تتجه قوة الجذب المسلطة على P ، من جزء صغير لعنصر الحلقة في Q (الذى سوف نعتبره جسيما) ، باتجاه PQ . لنحلل هذه القوة $\Delta \vec{F}_q$ الى مركبتين ، احداهما على طول PO ، ومقدارها $\Delta F_q \cos\phi$ والاخرى عمودية على PO ، ومقدارها $\Delta F_q \sin\phi$. هنا ϕ تمثل الزاوية OPQ كما هو واضح في الشكل . من التناظر يمكننا بسهولة روية تلاشي المجموع الاتجاهي لجميع المركبات العمودية للحلقة ، المسلطة على P . فالقوة $\Delta \vec{F}$ المسلطة من الحلقة كلها ، تكون اذن باتجاه PO ، ومقدارها ΔF ينتج من جمع المركبات $\Delta F_q \cos\phi$.
النتيجة اذن .

$$\Delta F = G \frac{m \Delta M}{u^2} \cos\phi = G \frac{m 2\pi \rho R^2 \sin\theta \cos\phi}{u^2} \Delta\theta$$

حيث u هي المسافة PQ (المسافة من الجسيم P الى الحلقة) كما هو مبين .
عندئذ من اخذ غاية $\Delta\theta$ والتكامل ينتج مقدار القوة المسلطة على P من كل القشرة اى

$$F = Gm2\pi\rho R^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \cos\phi \, d\theta}{u^2}$$

هذا التكامل يحسب بسهولة اذا وضعناه بدلالة u · ويكون ذلك باستخدام قانون الجيب تمام للمثلث OPQ ، حيث

$$r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta = u^2$$

ولما كانت r , R ثوابت فعند التفاضل نحصل على

$$rR\sin\theta \, d\theta = u \, du$$

كذلك لنفس المثلث OPQ يمكننا كتابة

$$\cos\phi = \frac{u^2 + r^2 - R^2}{2ru}$$

وعند تعويض المعادلتين المذكورتين اعلاه نحصل على

$$F = Gm2\pi\rho R^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{u^2 + r^2 - R^2}{2Rr^2u^2} \, du$$

$$= \frac{GmM}{4Rr^2} \int_{r-R}^{r+R} \left(1 + \frac{r^2 - R^2}{u^2}\right) du$$

$$= \frac{GmM}{r^2}$$

حيث $M = 4\pi\rho R^2$ تمثل كتلة القشرة · يمكننا عندئذ كتابتها بجبر المتجهات على النحو التالي —

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{n} \qquad (٦_٢)$$

حيث $\vec{n}$ تمثل وحدة متجه شعاعي يبدأ من المركز O · وتعني النتيجة السابقة ان القشرة الكروية المنتظمة الشكل لمادة عندما تجذب جسيما خارجيا تظهر وكأن جميع مادة قشرتها قد تجمعت في مركزها · ويصح هذا لكل جزء كروى متمركز من كرة

منتظمة صلدة . فالجسيم الكروى المنتظم يجذب اذن جسيما خارجيا وكان كتلـــة الكرة الكلية متجمعه في المركز . ويصح هذا ايضا للكرة غير المنتظمة مادام توزيع الكتلـــة متماثلا قطبيا ..

وقد ترك للطالب ان يبرهن على ان قوة الجذب على جسيم واقع داخل قشرة كرويـــــة منتظمة تساوى صفرا .

٦ـ٣) الطاقة الكامنـــة في مجال الجاذبية . جهد الجاذبية

Potential Energy in a Gravitational Field, Gravitational Potential

برهنا في البند ٤ـ٣ ، من الفصل الرابع، ان قانون التربيع العكسي للقوة يؤدى الى قانون الدرجة الاولى العكسي لدالة الطاقة الكامنة . وسنشتق في هذا الجزء من الفصل العلاقة نفسها بطريقة فيزيائية عميقة .

لنحسب الشغل اللازم W لتحرك جسيم اختبار كتلتـــه m على طول مســار معلــوم في مجال جاذبية جسيم آخر كتلتــه M .

سوف نضع الجسيم الذى كتلتـــه M في نقطة اصل محاورنا ، كما هو مبين في الشـــكـــل (٦ ـ ٣ أ).

لما كانت القوة $\vec{F}$ على جسيم الاختبار هي $\vec{F} = -(GMm/r^2)\,\vec{n}$

عندئذ للتغلب على هذه القوة يجب تسليط قـــوة خارجية $-\vec{F}$. اذن ، الشـــغل المنجز dW لتحريك جسيم الاختبار مسافة $d\vec{r}$ هو

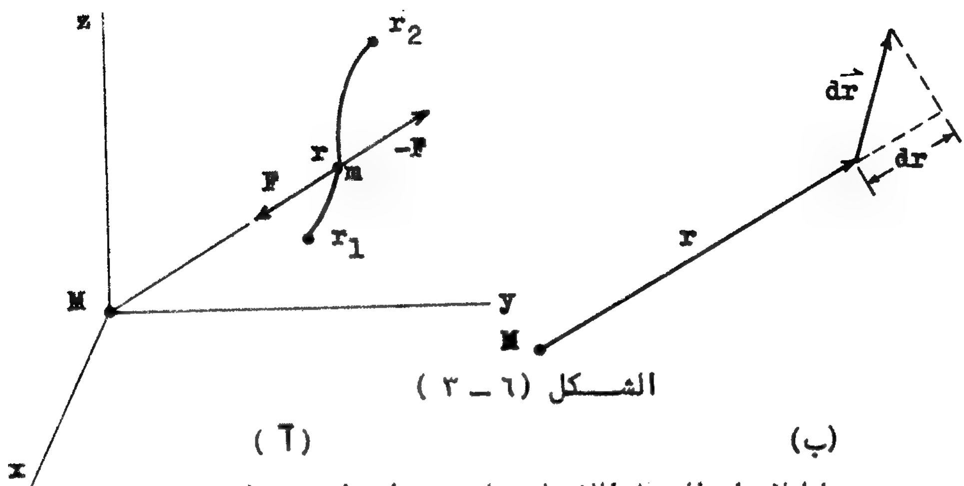
$$dW = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{GMm}{r^2}\,\vec{n}\cdot d\vec{r} \qquad (٦ـ٣)$$

والان يمكننا تحليل $d\vec{r}$ الى مركبتين : $\vec{n}dr$ موازية الى $\vec{n}$ (المركبة القطبية) والاخرى عموديـــة على $\vec{n}$ [(الشكل ٦ ـ ٣ (ب))] . من الواضـــح اذ ن

$$\vec{n}\cdot d\vec{r} = dr$$

اذن

$$W = GMm \int_{r1}^{r2} \frac{dr}{r^2} = -GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \qquad (٦ـ٤)$$



الشـــكل (٦ ـ ٣)

(آ) (ب)

مخطط لايجاد الشغل اللازم لتحريك جسيم اختبار من نقطة الى اخرى في مجـــال الجاذبيـــــــــة .

حيث r_2 ، r_1 يمثلان المسافتين القطبيتين للجسيم في بداية المسار ونهايتـه علـى التتالي . اذن لايعتمد الشغل على المسار الذى يتبعـه الجسيم، وانما يعتمد فقـط على نقطتي البداية والنهاية للمسار . وهذا يؤكد صحة حقيقة سبق معرفتها وهي ان قانون التربيع العكسي للقوة محافظ .

ويمكننـا تعريف الطاقة الكامنة لجسيم ذى كتلة في نقطة معينة واقعة في مجـــال جاذبية جسيم آخر بالشغل المنجز لتحريك جسيم الاختبار من موضع (اختيارى) يتخـذ كمرجع الى النقطة المعينة في السؤال . من الملائم اتخاذ موضع المرجع في اللانهايـــة .

عند تعويض $r_2 = r$ ، $r_1 = \infty$ في المعادلة (٦ـ٤) ، نحصل علـى

$$V(r) = GMm \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = -\frac{GMm}{r} \qquad (٦_٥)$$

في الحقيقة رأينا في البند (٤ـ٣) السابق ان دالة الطاقة الكامنـــة $V(r)=\frac{-k}{r}$ تعطي قانون التربيع العكسي للقـــوة $\vec{F} = -(\frac{k}{r^2})\vec{n}$. (من المهم ملاحظة انـه ليس من المنطق تعريف طاقـة كامنـة بالتكامل $\vec{F}.d\vec{r}$ مالم تعرف مسبقـا ان القـوة $\vec{F}$ محافظة ، اى ان دالة الجهد متواجدة) .

ومن المستحسن ، في الغالب ، تعريف كمية مثل Φ ، تسمى بجهد الجاذبية ، بطاقة جهد الجاذبية لوحدة الكتلة ، اى $\Phi = \frac{V}{m}$

اذن جهد الجاذبية في مجال جسيم كتلتـه M هو ـ

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \tag{٦ـ٦}$$

اذا كان لدينا عدد من الجسيمات مثل M_1 ، M_2 ، M_i.... وكانـــت مواضعها $\vec{r}_1$ ، $\vec{r}_2$ ، ..... ، $\vec{r}_i$ ، ..... ، فان جهد الجاذبيـــة في النقطـــة (x,y,z) يساوى مجموع جهود الجاذبية لجميع الجسيمات ، اى

$$\Phi(x,y,z) = \sum \Phi_i = -G\sum \frac{M_i}{u_i} \tag{٦ـ٧}$$

حيث u_i تمثل المسافة من الجسيم i الذى كتلتـه M_i الى نقطـة المجال $\vec{r}(x, y, z)$. اى

$$u_i = |\vec{r} - \vec{r}_i|$$

تسمى النسبة بين قوة الجذب على جسيم معلوم الى كتلتـه بشدة مجال الجاذبيـــة . ويرمـز لها بالحرف g.

اى

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$

والعلاقة بين شدة المجال والجهد هي نفسها بين القـوة $\vec{F}$ والطاقـة الكامنـــة V ، اى

$$\vec{g} = - \nabla \Phi$$

$$\vec{F} = - \nabla V \qquad (٦ـ ٨)$$

اذن مركبات شدة المجال تساوى تفاضلات الجهد الجزئيه على التتالي وباشارة سالبة اى ــ

$$g_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad g_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad g_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \qquad (٦ـ ٩)$$

يمكن حساب شدة مجال الجاذبية اولا بايجاد دالة الجهد من المعادلة (٦ـ٧) ثم حساب المنحدر كما هو مبين في المعادلات (٦ـ ٨) او (٦ـ٩) • وهذه الطريقة اسهل ، اعتياديا ، من طريقة حساب المجال رأسا من قانون التربيع العكسي • وسبب ذلك هو ان الجهد جمع عددى بينما المجال جمع اتجاهي • وتشابه هذه الحالة تماما نظرية المجالات الكهرومغناطيسية • وفي الحقيقة يمكن تطبيق اى من نتائج الالكتروستاتيك المناظرة لايجاد مجالات وجهد الجاذبية شريطة ان لاتوجد كتل سالبة •

جهد قشرة كروية منتظمة

لنجد ، مثلا ، دالة جهد قشرة كروية منتظمة باستعمال نفس الرموز المبينة في الشكل (٦ـ٣) ، عندنا ــ

$$\Phi = -G \int \frac{dM}{u} = -G \int \frac{2\pi \rho R^2 \sin \theta \, d\theta}{u}$$

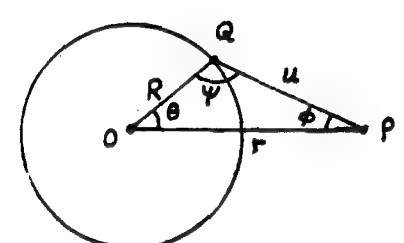
من نفس العلاقة بين u و θ التي استعملناها سابقا ، نجد ان المعادلة المذكورة اعلاه يمكن تبسيطها الى

$$\Phi = -G \frac{2\pi \rho R^2}{rR} \int_{r-R}^{r+R} du = -\frac{GM}{r} \qquad (٦ـ١٠)$$

حيث M هي كتلة القشرة • هذه هي نفس دالة الجهد لجسيم منفرد كتلته M ، موضوع في النقطة O • اذن مجال الجاذبية خارج القشرة هو نفس ذلك المجال المتولد فيما لو تجمعت الكتلة الكلية في المركز • وقد ترك للطالب ان يبرهن بعد اجراء التغيير الملائم على التكامل وغاياته ، ان الجهد داخل القشرة ثابت لذلك يكون المجال هنا صفرا •

* جهـد ومجـال حلقـة رفيعـه

نود الان ايجاد دالـة الجهد وشدة مجال الجاذبية في مستوى حلقـة دائريـة رفيعـه • لنفرض أن نصف قطر الحلقة يساوى R وكتلتها M • عندئذ لنقطة خارجية واقعة في مستوى الحلقة ، الشكل (٦ــ٤) نجد ان



الشكل ٦ــ ٤ • الاحداثيات لحساب مجال الجاذبية لحلقة •

$$\Phi = -G\int \frac{dM}{u} = -G\int_0^{2\pi} \frac{\mu R\, d\theta}{u}$$

حيث μ تمثل الكثافة الخطية للحلقة • لحساب التكامل ، سنعبر عنه بدلالة الزاوية Ψ المبينة في الشكل ، فمن المثلث OPQ نجد ان

$$R \sin \Psi = r \sin \phi$$

وبتفاضلها نحصل على

$$R \cos \Psi \; d\Psi = r \cos \phi \; d\phi = r \cos \phi \; (-d\theta - d\Psi)$$

تنتج الخطـوة الاخيرة من حقيقـة كون $\theta + \phi + \Psi = \pi$

وعند نقل الحدود واستعمال العلاقة $u = R \cos \Psi + r \cos \phi$

نحصل على ــ

$$u d\Psi = -r \cos \phi \; d\theta = -(r^2 - R^2 \sin^2 \Psi)^{\frac{1}{2}} d\theta$$

اذن التكامل المذكور اعلاه يصبح

$$\Phi = -G\mu R4 \int_0^{\pi/2} (r^2 - R^2 \sin^2 \Psi)^{-\frac{1}{2}} d\Psi \doteq -G \frac{4\mu R}{r} K\left(\frac{R}{r}\right) \;\cdot\cdot$$

.... (٦ ــ ١١)

حيث K يمثل التكامل الاهليلجي التام Complete elliptic integral

كما عرف في البند (٤ ــ١٠٤) ، عند فك التكامل كمتسلسلة وتكاملها حدا بعد حد نحصل علـــــى

$$\Phi = -G\,\frac{4\mu R}{r}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi R^2}{8r^2} + \dots\dots\dots\right)$$
$$= -\frac{GM}{r}\left(1 + R^2/4r^2 + \dots\dots\right) \qquad (٦ــ١٢)$$

عند ئذ شدة المجال على مسافة r من مركز الحلقة ، تكون بالاتجاه القطبي (لان Φ ليست دالـة للزاويـــة θ) ، وهي تعطى بالمعادلة التالية

$$\mathcal{G} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}\,\vec{n} = \left(-\frac{GM}{r^2} - \frac{3GMR^2}{4r^4} - \dots\right)\vec{n} \qquad (٦ــ١٣)$$

فالمجال اذن لايخضع لقانون التربيع العكسي ، اما اذا كانت r كبيرة جدا بالنسـبة الى R فالحد الاول يكون هو الغالب ويصبح المجال تقريبا ،من نوع التربيع العكسـي .

(٦ــ٤) الطاقة الكامنة في مجال مركزي عام

Potential Energy in a General Central Field.

رأينا سابقا ان المجال المركزي من نوع التربيع العكسي يكون محافظا ، ولنفرض الان السؤال التالي :

" هل اى مجال مركزي لقوة يكون محافظا ؟ يمكن كتابة المجال المركزي المتجانـس العام كما يلي ــ

$$\vec{F} = f(r)\,\vec{n} = \frac{f(r)}{r}\left(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z\right) \qquad (٦ــ١٤)$$

حيث $\vec{n} = (\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)/r$ تمثل الوحدة المتجهة القطبية ، ولكي نطبق اختبار المحافظة ، لنحسب دوران $\vec{F}$ ، اى

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

حيث

$$f_x=f(r)\frac{x}{r} \quad , \quad f_y=f(r)\frac{y}{r} \quad , \quad f_z=f(r)\frac{z}{r}$$

ثم نحسب التفاضل الجزئي على النحو التالي

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = x \frac{d}{dr} \left(\frac{f(r)}{r}\right) \frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} = y \frac{d}{dr} \left(\frac{f(r)}{r}\right) \frac{\partial r}{\partial x}$$

ولكن

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} = x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{r}$$

وبالتماثل

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

من الواضح ، عندئذ

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{xy}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{f(r)}{r}\right) = \frac{\partial f_y}{\partial x}$$

وهناك معادلات مماثلة للزوجين f_z ، f_x و f_z ، f_y . وباستعمال النتيجة السابقة ، نستطيع ان نجد بسهولة ان الدوران يساوى صفرا ولذلك يكون مجال القوة المركزية المذكور اعلاه محافظا . اذن يمكننا تعريف دالة الطاقة الكامنة كما في البند (٦ـ٣) ، على النحو التالي

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{F}.\vec{dr} = -\int_{\infty}^{r} f(r)\, dr \qquad (١٥ـ٦)$$

وهذا يجيز لنا حساب دالة الطاقة الكامنة ، اذا كانت دالة القوة معلومة . وبالعكس اذا كنا نعرف دالة الطاقة الكامنة ، فمن

$$f(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \qquad (١٦ـ٦)$$

نحصل على دالة القوة للمجال المركزى .

٦ـ ٤ الزخم الزاوى ـ **Angular Momentum**

افرض المعادلة العامة لحركة جسيم

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

لنضرب طرفي المعادلة اتجاهيا بالمتجه $\vec{r}$

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\vec{a}$$

من التعريف ، الطرف الايسر لهذه المعادلة ، يمثل عزم القوة حول نقطة الاصل ٠ والطرف الايمن عبارة عن مشتقة زمن الكمية $\vec{r} \times m\vec{v}$ ٠ ولكي نثبت ذلك ، عندنا

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} = \vec{r} \times m\vec{a}$$

نتجت الخطوة الاخيرة لان $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$. والكمية

$$\vec{r} \times m\vec{v} = \vec{L} \qquad (١٧-٦)$$

تسمى بزخم الجسيم الزاوى ٠ لذلك يمكننا كتابة

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (١٨-٦)$$

اى ان العزم حول نقطة اصل معلومة لقوة تؤثر على جسيم تساوى تغير زمن الزخم الزاوى حول هذه النقطة ٠

الزخم الزاوى في المجالات المركزية

Angular Momentum in Central Fields

لنطبق القاعدة العامة المذكورة اعلاه على حالة خاصة وهي حركة جسيم في مجال مركزى ٠ هنا ، القوة $\vec{F}$ تؤثر باتجاه متجه نصف القطر $\vec{r}$ ٠ اى ان الضرب الاتجاهي $\vec{r} \times \vec{F}$ يساوى صفرا ، وهذا يعني ، ان العزم يساوى صفرا ، لذلك لاى مجال مركزى يكون ـ

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

اذن

$$L = \text{constant}$$

اى ان الزخم الزاوى لجسيم يتحرك في مجال مركزى يبقى دائما ثابتا ·

نستنتج من ذلك ، ان مسار حركة الجسيم في مجال مركزى يبقى في مستو واحد ، لان متجه الزخم الزاوى الثابت L يكون عموديا على كل من $\vec{r}$, $\vec{v}$ ، اذن يكون عموديا على المستوى الذى يتحرك فيه الجسيم ·

Magnitude of the Angular Momentum مقدار الزخم الزاوى

لحساب مقدار الزخم الزاوى ، يفضل تحليل متجه السرعة $\vec{v}$ الى مركبتيه القطبية والمستعرضة في المحاور القطبية · وبذلك يمكن كتابة

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{n} + r\dot{\theta}\vec{n}'$$

حيث $\vec{n}$ تمثل الوحدة المتجهة القطبية و $\vec{n}'$ الوحدة المتجهة المستعرضة · عندئذ مقدار الزخم الزاوى يكون

$$L = |\vec{r} \times m\vec{v}| = |r\vec{n} \times m(\dot{r}\vec{n} + r\dot{\theta}\vec{n}')|$$

ولما كان $\vec{n} \times \vec{n} = 0$ و $\vec{n} \times \vec{n}' = 1$ اذن

$$L = mr^2\dot{\theta} = \text{constant}$$

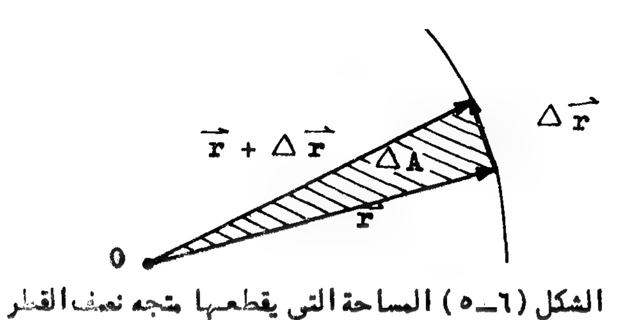
لجسيم يتحرك في مجال قوة مركزية ·

٦ـ ٦) قانون المساحات · قوانين كبلر لحركة الكواكب السيارة

The Law of Areas. Kepler's Laws of Planetary Motion.

يرتبط الزخم الزاوى لجسيم بالمعدل الزمني للمساحة التي يقطعها متجه الموضع · لتوضيح ذلك ، افرض الشكل (٦ـ ٥) الذى يبين متجهي موضع متتاليين $\vec{r}$ ، $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ يمثلان حركة جسيم في فترة زمنية مقدارها Δt · مساحة المثلث المظلل ΔA الواقعة بين المتجهين هي

$$\Delta A = \tfrac{1}{2}|\vec{r} \times \Delta\vec{r}|$$



الشكل (٦ـ٥) المساحة التي يقطعها متجه نصف القطر

وعند قسمة طرفي هذه المعادلة على Δt واخذ الغاية نحصل على —

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \vec{v} \right| \qquad (٦ــ٢٠)$$

ومن تعريف $\vec{L}$ يمكننا كتابة هذه المعادلة على النحو التالي

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} \left| \vec{r} \times m\vec{v} \right| = \frac{L}{2m} \qquad (٦ــ٢١)$$

للمعدل الزمني الذى يمسح فيه متجه نصف القطر مساحة • ولما كان الزخم الزاوى $\vec{L}$ ثابتا في اى مجال مركزى • نستنتج من ذلك ان السرعة المساحية dA/dt تكون ثابتة ايضا في المجال المركزى

قوانين كپلر Kepler's Laws

اكتشف يوهانزكپلر Johannes Kepler سنة ١٦٠٩ بطريقة التجربة ان الكواكب عندما تدور حول الشمس تكون سرعاتها المساحية ثابتة • لقد استنتج كپلر هذا القانون واثنين آخرين • بعد ان قام تيشوبرا Tycho Brahe بدراسة مضنية لمواضع الكواكب وتسجيلها • وقوانين كپلر الثلاثة هي —

١ـ كل كوكب يتحرك بمسار قطع ناقص تكون الشمس في بؤرته •

٢ـ يقطع متجه نصف القطر مساحات متساوية في ازمان متساوية •

٣ـ يتناسب مربع زمن الدورة حول الشمس مع مكعب طول المحور الرئيسي للمسار

وقد وضح نيوتن ان قوانين كپلر الثلاثة هي نتائج لقانون الجاذبية ٠ ومن المناقشة التي تقودنا الى معادلة (٦ـ ٢١) ، نرى ان القانون الثاني قد نتج من حقيقة كون مجال جاذبية الشمس مركزيا ٠ اما القانونان الاخران ـ كما سنبين بعدئذ ، فهما نتيجتان لحقيقة كون القوة تتغير مع مربع المسافة العكسي ٠

٦ـ٧) مدار جسيم في مجال قوة مركزيه

Orbit of a Particle in a Central-Force Field

لدراسة حركة جسيم في مجال مركزي ، من الملائم التعبير عن المعادلة التفاضلية للحركة

$$m\ddot{\vec{r}} = f(r)\,\vec{n}$$

بالاحداثيات القطبية ٠ وكما بينا في البند (٢ـ٩) ، ان مركبة $\ddot{\vec{r}}$ القطبية هي $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ والمستعرضة هي $2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}$. وعند التعويض نحصل على مركبات المعادلات التفاضلية للحركة وهي

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r) \qquad (٦ـ٢٢)$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \qquad (٦ـ٢٣)$$

ومن المعادلة الثانية نحصل على

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

أو

$$r^2\dot{\theta} = \text{constant} = h \qquad (٦ـ٢٤)$$

ومن معادلة (٦ـ ١٩) نرى ان

$$h = \frac{L}{m} \qquad (٦ـ٢٥)$$

اذن h يمثل الزخم الزاوي لوحدة الكتلة ٠ ان ثبوته يعني ببساطة صياغة الحقيقة المعروفة مرة ثانية ، وهي ان الزخم الزاوي لجسيم يكون ثابتا عندما يتحرك تحت تأثير قوة مركزيه ٠

ويمكننا نظريا حل المعادلتين التفاضليتين [المعادلتان (٦ـ٢٢) و (٦ـ٢٤)] لدالة

قطبيــة معلومة ($f(r)$) للحصول على r و θ كدوال للزمن t ٠ وفي أغلــب الحالات يهمنا نقط المسار في الفضاء (المدار) بغض النظر عن الزمن t ٠ فلايجا د معادلة المدار سنستخدم المتغير u المعرّف كما يلي —

$$r = \frac{1}{u} \tag{٦ ـ ٢٦}$$

اذ ن

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\,\dot{u} = -\frac{1}{u^2}\,\dot{\theta}\,\frac{du}{d\theta} = -h\,\frac{du}{d\theta} \tag{٦ ـ ٢٧}$$

حيث نتجت الخطوة الاخيرة من

$$\dot{\theta} = hu^2 \tag{٦ ـ ٢٨}$$

وفقا للمعادلتين (٦ـ٢٤) و(٦ـ٢٦)٠
وعند التفاضل للمرة الثانية ٠ نحصل على

$$\ddot{r} = -h\,\frac{d}{dt}\,\frac{du}{d\theta} = -h\dot{\theta}\,\frac{d^2u}{d\theta^2} = -h^2u^2\,\frac{d^2u}{d\theta^2} \tag{٦ ـ ٢٩}$$

من قيم $\ddot{r}, \dot{\theta}, r$ نجد بسهولة ان المعادلة (٦ـ٢٢) تتحول الـــى

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{1}{mh^2\,u^2}\,f(u^{-1}) \tag{٦ـ٣٠}$$

المعادلة المذكورة اعلاه هي معادلة المدار التفاضلية لجسيم يتحرك تحت تأثيـر قـــوة مركزيــه٠ والحل يعطي u (اذن r) كدالة للمتغير θ ٠ وبالعكس٠ اذا كانت المعادلة القطبية للمدار معلومة٠ اي $r=r(\theta)=u^{-1}$ ٠ عندئذ يمكن ايجاد دالة القــوة بتفاضلها للحصول على $d^2u/d\theta^2$ وتعويضها في المعادلة التفاضليـــة ٠

امثلـــة

١ــ جسيم في مجال مركزي يتحرك بمدار لولبــي

$$r = c\theta^2$$

جد شكل دالـة القـــوة ٠

عندنـــا $u = \frac{1}{c\theta^2}$

و

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{2}{c}\,\theta^{-3}\ , \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{6}{c}\,\theta^{-4} = 6cu^2$$

عندئذ ، من المعادلة (٦ـ٣٠)

$$6cu^2 + u = \frac{-1}{mh^2u^2}\, f(u^{-1})$$

اذن

$$f(u^{-1}) = -\, mh^2\,(6cu^4 + u^3)$$

و

$$f(r) = -mh^2\left(\frac{6c}{r^4} + \frac{1}{r^3}\right)$$

فالقوة تتكون اذن من قانوني التكعيب العكسي والقوة الرابعة العكســـــــــــية ٠

٢ـ في المسألة السابقة جد كيف تتغير الزاوية θ مع الزمن ٠

نستعمل هنا حقيقة كون $h = r^2\dot{\theta}$ ثابتا ٠ اذن

$$\dot{\theta} = hu^2 = h\,\frac{1}{c^2\theta^4}$$

أو

$$\theta^4 d\theta = \frac{h}{c^2}\, dt$$

وهكذا ، بالتكامل نجد ان

$$\frac{\theta^5}{5} = hc^{-2}t$$

حيث فرض ان ثابت التكامل يساوي صفرا ٠ عندئذ

$$\theta = Ct^{1/5}$$

حيث

$$C = \text{constant} = (5hc^{-2})^{1/5}$$

٦ــ ٨) معادلة الطاقة للمدار Energy Equation of the Orbit

ان مربع الانطلاق بالمحاور القطبية هو

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

لما كانت القوة المركزية محافظة ، فالطاقة الكلية $T + V$ ثابتة ، وهي تساوى

$$\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E = \text{constant} \qquad (٦ــ ٣١)$$

ويمكننا كذلك كتابة المعادلة السابقة بدلالة المتغير $u = \frac{1}{r}$. ومن المعادلتين (٦ــ ٢٧) و (٦ــ ٢٨) نحصل على

$$\tfrac{1}{2}mh^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 \right] + V(u^{-1}) = E \qquad (٦ــ ٣٢)$$

وفي المعادلة السابقة هناك متغيران فقط هما u , θ . ونسمي هذه المعادلة اذن بمعادلة الطاقة للمدار .

مثال

من المثال ، في البند السابق ، حصلنا للمدار اللولبي $r = c\theta^2$ على

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{-2}{c}\theta^{-3} = -2c^{\frac{1}{2}}u^{3/2}$$

فمعادلة الطاقة للمدار تكون اذن

$$\tfrac{1}{2}mh^2 (4cu^3 + u^2) + V = E$$

او

$$V(r) = E - \tfrac{1}{2} mh^2 \left(\frac{4c}{r^3} + \frac{1}{r^2}\right)$$

وهذه تعطي دالة القوة بسهولة لان

$$f(r) = -dV/dr$$

٦ــ ٩) المدارات في مجال التربيع العكسي

Orbits in an Inverse-square Field

من اهم انواع المجالات المركزيه هو الذى تتغير فيه القوة عكسيا مع مربع المسافة القطبية

$$f(r) = -k/r^2 \tag{٦-٣٣}$$

لما كنا قد ادخلنا الاشارة السالبة في المعادلة السابقة اصبح الثابت k يكون موجبا لقوة التجاذب والعكس بالعكس . (كما رأينا في البند (٦-٢) $k=GMm$ لمجال الجاذبية) . عندئذ تصبح معادلة المدار [المعادلة (٦ - ٢٠)].

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{mh^2} \tag{٦-٣٤}$$

ومن الواضح ان الحل العام هو

$$u = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{k}{mh^2} \tag{٦-٣٥}$$

او

$$r = \frac{1}{A\cos(\theta - \theta_0) + k/mh^2} \tag{٦-٣٦}$$

وتحسب ثوابت التكامل A ، θ_0 من الشروط الابتدائية . واما كانت قيمة θ_0 تعين ميلا ن المدار ليس غير، لذلك يمكننا بدون فقدان عمومية المعادلة اختيار $\theta_0 = 0$ عند بحث شكل المدار، اى -

$$r = \frac{1}{A\cos\theta + k/mh^2} \tag{٦-٣٧}$$

وهذه هي معادلة المدار القطبية . وهي معادلة قطع مخروطي (قطع ناقص ،مكافيء، او زائد) مع نقطة الاصل في البوءرة . ويمكن كتابة المعادلة بشكل قياسي على النحو التالي

$$r = r_0\,\frac{1 + e}{1 + e\cos\theta} \tag{٦-٣٨}$$

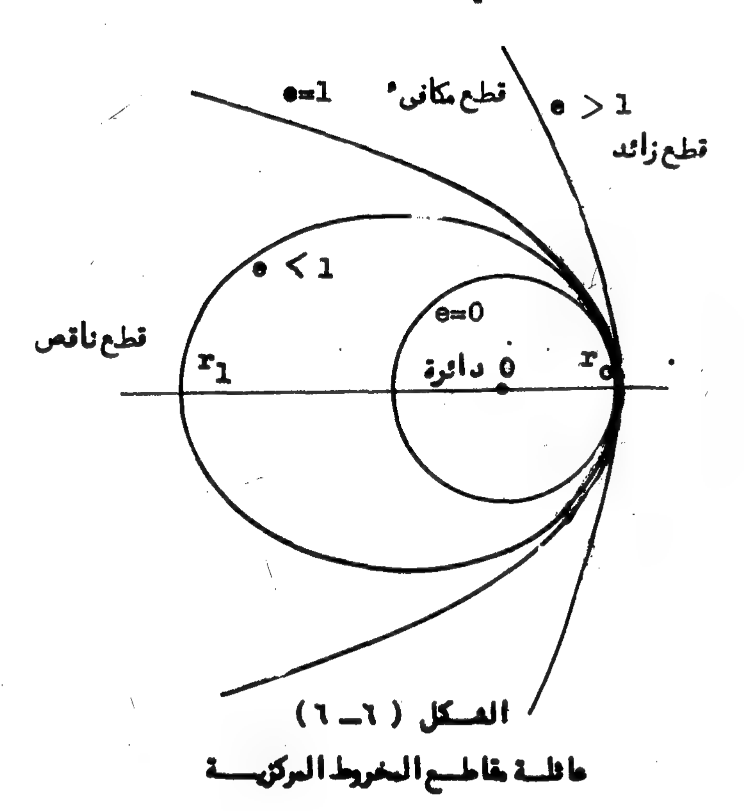
حيث

$$e = \frac{A\,mh^2}{k} \tag{٦-٣٩}$$

و

$$r_o = \frac{mh^2}{k(1 + e)} \qquad (٦_ ٤٠)$$

الثابت e يسمى باختلاف المركز eccentricity · والشكل (٦ــ ٦) يوضح الحالات المختلفة وهي



الشكل (٦ــ ٦)
عائلة مقاطع المخروط المركزية

قطع ناقص : $e < 1$ دائرة (حالة خاصة من القطع الناقص) : $e = 0$

قطع مكافئ : $e = 1$ قطع زائد : $e > 1$

من المعادلة "(٦ــ ٣٨) r_o هي قيمة r عندما $\theta = 0$ · وقيمة r عندما $\theta = \pi$ هي

$$r_1 = r_o \frac{1 + e}{1 - e} \qquad (٦_ ٤١)$$

وبالنسبة الى المدارات الاهليجيه للكواكب حول الشمس ، تسمى المسافة r_0 بالحضيض الشمسي Perihelion (اقرب مسافة الى الشمس) ، والمسافة r_1 تسمى بالاوج .. aphelion (ابعد مسافة من الشمس) . اما المسافات المماثلة لها لمدار القمر حول الارض ، ولمدارات توابع الارض الصناعية ، فتسمى مسافات الحضيض القمري Perigee والاوج apogee على التتالي .

ان الاختلافات المركزية لمدارات الكواكب حول الشمس صغيرة جدا (انظر جدول " ٦ـ١ " ادناه) . على سبيل المثال ، في حالة مدار الارض $e = 0.017$ ، r_1=95,000,000 miles, r_0 = 91,000,000 miles . ومن ناحية اخرى ، فان المذنبات بصورة عامة لها اختلافات مركزية كبيرة (مدارات كبيرة الاستطالة) . فمثلا الاختلاف المركزي لمذنب هالي يساوي ٠,٩٦٧ ومسافة حضيضه ٥٥٠٠٠٠٠٠ ميل ، بينما اوجه خلف مدار نبتون . ولمذنبات كثيرة (النوع غير الدائر) مدارات قطع مكافئ او زائد .

ايجاد البرمترات المدارية من الشروط الابتدائية

رأينا من المعادلة (٦ـ٤٠) ان اختلاف المركز يمكن التعبير عنه كما يلي ـ

$$e = \frac{mh^2}{kr_0} - 1 \tag{٦ـ٤٢}$$

لنفرض ان v_0 تمثل انطلاق الجسم عندما تكون $\theta=0$. عندئذ ، من تعريف الثابت h المعادلة (٦ـ٢٤) ، عندنا

$$h = r^2\dot{\theta} = r_0^2\,\dot{\theta}_0 = r_0v_0 \tag{٦ـ٤٣}$$

فاختلاف المركز عندئذ يكون

$$e = \frac{mr_0v_0^2}{k} - 1 \tag{٦ـ٤٤}$$

للمدار الدائري ($e = 0$) عندئذ نحصل على $k = mr_0v_0^2$ او

$$\frac{k}{r_0^2} = \frac{mv_0^2}{r_0} \tag{٦ـ٤٥}$$

ولنرمز الان للكمية k/mr_0 بالرمز v_c^2 بحيث ، اذا كانت $v_0=v_c$

يكون المدار دائريا · عندئذ يمكن كتابة علاقة اختلاف المركز في المعادلة (٦ــ ٤٤) ، كما يلي —

$$e = \left(\frac{v_o}{v_c}\right)^2 - 1 \qquad (٦ــ ٤٦)$$

ويمكن كتابة معادلة المدار على النحو التالي

$$r = r_o \frac{(v_o/v_c)^2}{1 + \left[(v_o/v_c)^2 - 1\right] \cos \theta} \qquad (٦ــ ٤٧)$$

ونحصل على قيمة r_1 عندما تكون $\theta = \pi$ اذن

$$r_1 = r_o \frac{(v_o/v_c)^2}{2 - (v_o/v_c)^2} \qquad (٦ــ ٤٨)$$

مثال

تابع صاروخي يدور حول الارض بمدار دائرى نصف قطره r_o · وقد سبب انفجار محرك الصاروخ المفاجيء زيادة انطلاقه بنسبة عشرة بالمائة · جد معادلة المدار الجديد واحسب مسافة نقطة الاوج ·

لنفرض ان v_c تمثل الانطلاق في المدار الدائرى ، و v_o الانطلاق الابتدائي الجديد ، اى ان

$$v_o = 1.1\ v_c$$

عندئذ تصبح المعادلة (٦ــ ٤٧) للمدار الجديد ·

$$r = r_o \frac{1.21}{1 + 0.21 \cos \theta}$$

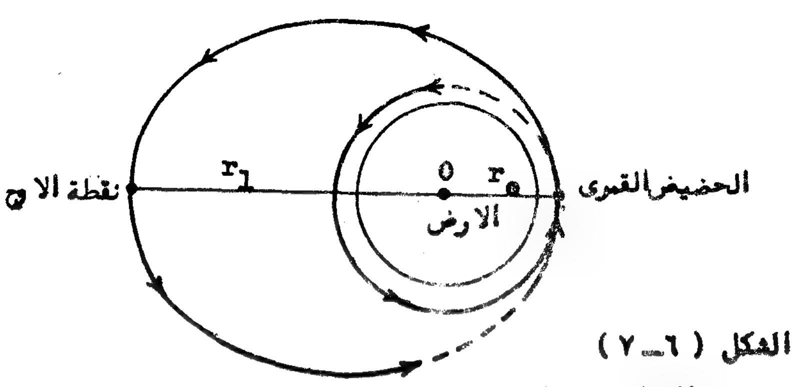
ومسافة نقطة الاوج من المعادلة (٦ــ ٤٨) هي

$$r_1 = r_o \frac{1.21}{2 - 1.21} = 1.53\ r_o$$

وقد بينت المدارات في الشكل (٦ــ ٧) ·

٦ــ ١٠) الطاقات المدارية في مجال التربيع العكسي

Orbital Energies in the Inverse-square Field



الشكل (٦ ـ ٧)
يغير الصاروخ الفضائي مداره
من دائرة الى قطع ناقص .

لما كانت دالة الطاقة الكامنة (V (r لمجال قوة التربيع العكسية هي

$$V(r) = -\frac{k}{r} = -ku$$

عندئذ نحصل من المعادلة (٦ ـ ٣٢) على معادلة الطاقة للمدار وهي ـ

$$\tfrac{1}{2}mh^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] - ku = E \qquad (٦ـ٤٩)$$

او عند فرز المتغيرات ، نحصل على

$$d\theta = \left(\frac{2E}{mh^2} + \frac{2ku}{mh^2} - u^2\right)^{-\frac{1}{2}} du \qquad (٦ـ٥٠)$$

عند التكامل ، نجد ان

$$\theta = \sin^{-1}\left[\frac{mh^2u - k}{(k^2 + 2Emh^2)^{\frac{1}{2}}}\right] + \theta_o$$

حيث θ_o تمثل ثابت التكامل ، فاذا فرضنا ان $\theta_o = -\pi/2$ وحلت للمتغير u ،
نحصل على

$$u = \frac{k}{mh^2}\left[1 + (1 + 2Emh^2k^{-2})^{\frac{1}{2}} \cos\theta\right]$$

او

$$r = \frac{mh^2k^{-1}}{1 + (1 + 2Emh^2k^{-2})^{\frac{1}{2}} \cos\theta} \qquad (٦ـ٥١)$$

هذه هي معادلة المدار القطبية • وعند مقارنتها بالمعادلتيـــــن (٦ ــ ٣٨) و (٦ــ ٣٩) نرى ان الاختلاف المركزى هو

$$e = (1 + 2Emh^2k^{-2})^{\frac{1}{2}} \qquad (٦ــ ٥٢)$$

العلاقة المذكورة اعلاه للاختلاف المركزى تجيز لنا تصنيف المدارات وفقا للطاقـــة الكلية E كما يلي ــ

مدارات مغلقة (قطع ناقص او دائرة) :	$e < 1$	$E < 0$
قطـع مكافـيء :	$e = 1$	$E = 0$
قطـع زائـــد :	$e > 1$	$E > 0$

لما كانت $E = T+V$ وكذلك ثابتة • فالمدارات المغلقة هي التي تكون فيهـــا $T < |V|$ • والمدارات المفتوحة هي التي تكون فيها $T \geqslant |V|$

مثـــال

لوحظ ان انطلاق نجم مذنب يساوى v_o عندما يكون على مسافة r_o من الشمس • واتجاه حركتـــه يصنع زاوية ϕ مع متجـــه نصف القطر من الشمس • جد الاختـــلاف المركزى لمدار النجم المذنب •

في مجال جاذبية الشمس $k = GMm$ حيث M تمثل كتلة الشمس و m كتلة الجسم • الطاقة الكلية E • عندئذ تعطى من

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv_o^2 - \frac{GMm}{r_o} = \text{constant}$$

وسيكون المدار قطعا ناقصا • مكافئا او زائدا حسبما تكون E سالبة • صفر او موجبة• ووفقا لذلك اذا كانت (v_o^2) اقل من• تساوى او اكبر مـــن $\frac{2GM}{r_o}$

فسيكون المدار قطعا ناقصا • مكافئا او زائدا على التتالي • الآن •

$$h = |\vec{r} \times \vec{v}| = r_o v_o \sin \phi$$

اذ ن تكون قيمة الاختلاف المركزى e من المعادلة (٦ـ ٥٢) هـــي

$$e = \left[1 + \left(v_o^2 - \frac{2GM}{r_o}\right) \frac{r_o^2 v_o^2 \sin^2 \phi}{G^2 M^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

وقد يعبر عن حاصل الضرب GM بدلالة انطلاق الارض v_e ونصف قطرهـــا المدارى r_e (على فرض ان المدار دائرى) ، اى

$$GM = r_e v_e^2$$

وعندئذ يمكن كتابة المعادلة التي تعبر عن الاختلاف المركزى على النحو التالي ـ

$$e = \left[1 + \left(\frac{v_o^2}{v_e^2} - \frac{2r_e}{r_o}\right) \frac{r_o^2 v_o^2}{r_e^2 v_e^2} \sin^2 \phi\right]^{\frac{1}{2}}$$

غايات الحركة نصف القطرية

من معادلة المدار النصف قطريه (٦ـ ٥١) ، نرى ان قيم r عندما $\theta = 0$ هي r_o ، وعندما $\theta = \pi$ هي r_1 ، اى ان

$$r_o = \frac{mh^2 k^{-1}}{1 + (1+2Emh^2k^{-2})^{\frac{1}{2}}} \qquad (٦ـ ٥٣)$$

$$r_1 = \frac{mh^2 k^{-1}}{1 - (1+2Emh^2k^{-2})^{\frac{1}{2}}} \qquad (٦ـ ٥٤)$$

في حالة المدار الاهليلجي تكون E سالبة والقطر الرئيسي $2a$ للقطـــع هـو

$$2a = r_o + r_1$$

عندئذ نجد ، من المعادلتين (٦ـ ٥٣) و (٦ـ ٥٤) ، ان

$$2a = -\frac{k}{|E|} \qquad (٦ـ ٥٥)$$

اذن • قيمة a تحسب كليا من الطاقة الكلية •
وفي حالة المدار الدائرى الذى نصف قطره a عندئذ

$$V = -\frac{k}{a} = \text{constant}$$

$$E = -\frac{k}{2a} = \text{constant}$$

اذن الطاقة الحركية تكون

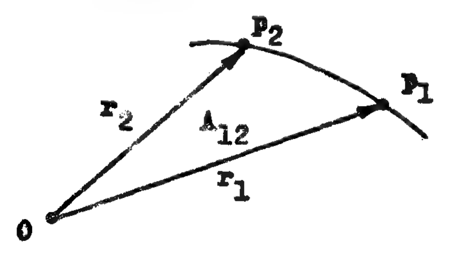
$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 = E - V = k/2a$$

ويمكن البرهنة على ان معدل زمن الطاقة الحركية • للحركة الاهليليجية في مجال التربيع العكسي هي $k/2a$ ايضا • والمعدل الزمني للطاقة الكامنة هو $-k/a$ حيث a يمثل المحور الرئيسي للقطع الناقص • وقد ترك البرهان كتمرين •

٦ ـ ١١) مدة الدورة للحركة المدارية Periodic Time of Orbital Motion

بينا في البند (٦ ـ ٦) ان السرعة المساحية $\dot{A}$ لجسيم يتحرك في اى مجال مركزى تكون ثابتة • اذن • الزمن اللازم t_{12} ليتحرك جسيم من نقطة مثل P_1 الى اى نقطة اخرى P_2 (الشكل • ٦ ـ ٨) نحصل عليه من المعادلتين (٦ ـ ٢١) و (٦ ـ ٢٥) وهو

$$t_{12} = \frac{A_{12}}{\dot{A}} = A_{12}\frac{2m}{L} = A_{12}\frac{2}{h}$$



الشكل (٦ ـ ٨)
المساحة التي يقطعها
متجه نصف القطر

حيث A_{12} تمثل المساحة التي يقطعها متجه نصف القطر بين النقطتين p_1 و p_2.
لنستخدم النتيجة السابقة لحالة مدار قطع ناقص لجسيم في مجال التربيع العكسي .
لما كانت مساحة القطع الناقص هي πab حيث a و b يمثلان نصفي المحور الرئيسي والثانوي، على التتالي ، عندئذ ، الزمن اللازم τ لكي يكمل جسيم مسارا مداريا واحدا هو

$$\tau = \frac{2\pi ab}{h} \qquad (٦-٥٦)$$

ولكن للقطع الناقص

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$$

حيث e هي الاختلاف المركزي . اذن يمكننا كتابة

$$\tau = \frac{2\pi a^2}{h} \sqrt{1 - e^2}$$

علاوة على ذلك، نجد من المعادلتين (٦-٤٠) و (٦-٤١) ، ان المحور الرئيسي هو

$$2a = r_0 + r_1 = \frac{mh^2}{k}\left(\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e}\right) = \frac{2mh^2}{k(1-e^2)}$$

وبذلك يمكننا التعبير عن زمن الدورة كما يلي

$$\tau = 2\pi \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{1}{2}} a^{3/2} \qquad (٦-٥٧)$$

اذن، زمن الدورة لمجال قوة تربيع عكسية معينة يعتمد فقط على طول المحور الرئيسي لمدار القطع الناقص .

ولما كان $k = GMm$ لجرم كتلته m يتحرك في مجال جاذبية الشمس ، يمكننا كتابة زمن دورة حركة الجرم المدارية كما يلي —

$$\tau = ca^{3/2} \qquad (٦-٥٨)$$

حيث $c = 2\pi (GM)^{-\frac{1}{2}}$.من الواضح ان c هي نفسها لجميع الاجرام . والمعادلة (٦-٥٨) تمثل الصيغة الرياضية لقانون كبلر الثالث . (البند ٦-٦) .
اذا استعملت الوحدات الفلكية لقياس a (٠٠٠ ٠٠٠ ٩٣ ميل = a_{earth} =١

وحدة فلكية) وقيست T بالسنين ، عندئذ تكون قيمة c العددية واحدا . وقد سطرت في الجدول (٦ ـ ١) ازمان الدورات والمحاور نصف الرئيسية بالوحدات الفلكية وكذلك الاختلافات المركزية لمدارات الاجرام في المجموعة الشمسية .

الجدول (٦ ـ ١)

الجرم		المحاور نصف الرئيسية بالوحدات الفلكية	زمن الدورة بالسنوات	الاختلاف المركزي
عطارد	Mercury	٠ر٣٨٧	٠ر٢٤١	٠ر٢٠٦
الزهره	Venus	٠ر٧٢٣	٠ر٦١٥	٠ر٠٠٧
الارض	Earth	١ر٠٠٠	١ر٠٠٠	٠ر٠١٧
المريخ	Mars	١ر٥٢٤	١ر٨٨١	٠ر٠٩٣
المشترى	Jupiter	٥ر٢٠٣	١١ر٨٦	٠ر٠٤٨
زحل	Saturn	٩ر٥٣٩	٢٩ر٤٦	٠ر٠٥٦
اورانوس	Uranus	١٩ر١٩	٨٤ر٠٢	٠ر٠٤٧
نبتون	Neptune	٣٠ر٠٦	١٦٤ر٨	٠ر٠٠٩
بلوتو	Pluto	٣٩ر٤٦	٢٤٧ر٧	٠ر٢٤٩

٦ ـ ١٢) الحركة في مجال التربيع العكسي التنافرى ـ تشتت الجسيمات الذريه

Motion in an Inverse-square Repulsive Field. Scattering of Atomic Particles

هناك تطبيق فيزيائي مهم يتضمن حركة جسيم في مجال مركزى ، قانون القوة فيه من نوع التربيع العكسي التنافرى ، كانحراف الجسيمات الذرية العالية الانطلاق (البروتونات جسيمات الفا وهلم جرا) بتأثير نويات الذرات الموجبة الشحنة . ان الابحاث الاساسية التي لها الاولية في معلوماتنا الحالية للتركيب الذرى والنووى هي تجارب التشتت .

وكان اول من بدأها الفيزيائي البريطاني اللورد ردرفورد في بداية القـــرن الحالـــي ٠

افرض ان جسيما شحنتـــه q وكتلتـــه m (الجسيم الساقط بانطلاق عال) يمر بالقرب من جسيم ثقيل شحنته Q (النواة ــ فرضت ثابتة) ٠ والجسيم الساقط تؤثر عليـــه قـــوة تنافريه تعطى من قانون كولوم ، اى

$$f(r) = \frac{Qq}{r^2}$$

حيث فرض موضع Q في نقطة الاصل (سنستعمل الوحدات الالكتروستاتيكية cgs ، للشحنات q، Q . عندئذ تكون r مقاسة بالسنتمترات والقوة بالداينات) ، عندئـــذ تصبح المعادلة التفاضلية للمدار (٦ــ٣٠) كما يلي

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{Qq}{mh^2} \qquad (٦ــ٥٩)$$

اذن معادلة المدار تكون

$$u^{-1} = r = \frac{1}{A\cos(\theta-\theta_0) - Qq/mh^2} \qquad (٦ــ٦٠)$$

ويمكننا كذلك كتابة معادلة المدار بالشكل الذى تعطيه المعادلة (٦ــ ٥١) ، اى

$$r = \frac{mh^2 Q^{-1}q^{-1}}{-1 + (1+2Emh^2Q^{-2}q^{-2})^{\frac{1}{2}} \cos(\theta-\theta_0)} \qquad (٦ــ ٦١)$$

لان $k = -Qq$. المدار قطع زائد ٠ ويمكن روءية ذلك من الحقيقة الفيزيائيـــة وهـــي ان الطاقة E تكون دائما اكبر من الصفر في مجال قوة تنافرية ٠ (في الحالة التي عندنـــا ٠ $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{Qq}{r}$) اذن ، في المعادلة (٦ــ ٦١) ، الاختلاف المركـــزى e وهو معامل $\cos(\theta - \theta_0)$ يكون اكبر من واحد ٠ وهذا يعني ان المدار يجـــب ان يكون قطعا زائدا

يقترب الجسيم الساقط على طول احد خطوط المقاربـــة asymptote ويبتعد على طول الآخر كما هو مبين في الشكل (٦ــ ٩) ٠ وقد اخترنا اتجاه المحور القطبـــي بحيث

يكون موضع الجسيم الابتدائي في $\theta=0$, $r=\infty$. وواضح ان r في اى من معادلتي المدار تاخذ قيمة النهاية الصغرى عندما تكون $\cos(\theta-\theta_0)=1$ ، اى عندما $\theta=\theta_0$. ولما كانت $r=\infty$ عندما $\theta=0$ ، عندئذ r تساوى كذلك مالا نهاية عندما $\theta=2\theta_0$. فالزاوية بين الخطين المتقاربين للقطع المكافئ اذن تساوى $2\theta_0$ ، والزاوية ϕ التي ينحرف فيها الجسيم الساقط هي

$$\phi = \pi - 2\theta_0 \qquad (٦-٦٢)$$

علاوة على ذلك، يتلاشى مقام يمين المعادلة (٦-٦١) ، عندما $\theta=0$ و $\theta=2\theta_0$. اذن

$$-1 + (1 + 2Emh^2Q^{-2}q^{-2})^{\frac{1}{2}} \cos\theta_0 = 0$$

ومنها نجد بسهولة ان

$$\tan\theta_0 = (2Em)^{\frac{1}{2}} hQ^{-1}q^{-1} = \cot\frac{\phi}{2} \qquad (٦-٦٣)$$

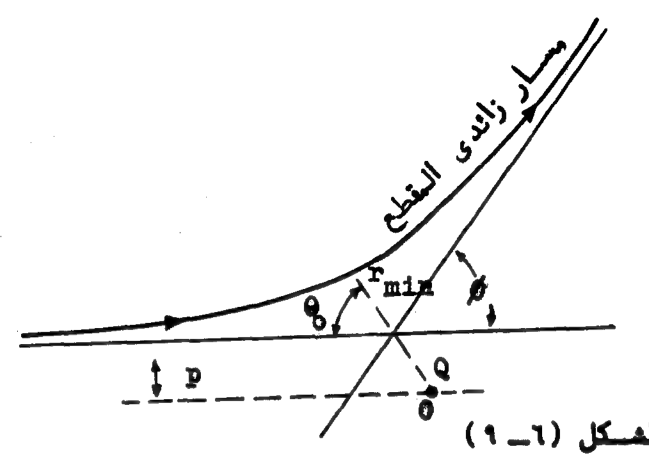
وتنتج الخطوة الاخيرة من المعادلة (٦-٦٢) .

عند تطبيق المعادلة السابقة على مسائل التشتت ، فمن المناسب التعبير عن الثابت h بدلالة كمية اخرى p تسمى برمتر التصادم Impact Parameter. وبرمتر التصادم هو المسافة العمودية بين نقطة الاصل (مركز التشتت) والخط الابتدائي لحركة الجسيم) كما هو مبين في الشكل (٦-٩) . اى ان

$$h = |\vec{r} \times \vec{v}| = pv_0 \qquad (٦-٦٤)$$

حيث v_0 تمثل الانطلاق الابتدائي للجسيم . ونعلم ايضا ان الطاقة E ثابتة وتساوى الطاقة الحركية الابتدائية $\frac{1}{2}mv_0^2$ ، لان الطاقة الكامنة الابتدائية تساوى صفرا ($r=\infty$) . ووفقا لذلك ، يمكننا كتابة علاقة التشتت من المعادلة (٦-٦٣) على النحو التالي

$$\cot\frac{\phi}{2} = \frac{pmv_0^2}{Qq} = \frac{2pE}{Qq} \qquad (٦-٦٥)$$



الشكل (٦ـ ٩)
مسار زائدى القطع لجسيم مشحون يتحرك في مجال
الترهيع العكسي التنافرى لجسيم مشحون آخـــر

امثلـــة

١ـ ينبعث جسيم الفا من الراديوم (E تساوى خمسة ملايين الكترون فولت وتســاوى ٥ × ١٠^٦ × ١,٦ × ١٠^-١٢ ارك) وينحرف بزاوية ٩٠ عند مروره بالقـرب مـن نواة الذهب • فما قيمة برمتر التصادم ؟ •

لجسيمات الفا $q = 2e$ • وللذهب $Q = 79e$ • حيث e تمثل الشحنـة الاوليـة (الشحنة التي يحملها الالكترون تساوى e ـ) • في وحداتنا $e=4.8x10^{-10}$esu • .

اذن • من المعادلة (٦ـ ٦٥) • نحصل على

$$p = \frac{Qq}{2E} \cot 45^o = \frac{2 \times 79 \times (4.8)^2 + 10^{-20} \text{ cm}}{2 \times 5 \times 1.6 \times 10^{-6}}$$

$$= 2.1 \times 10^{-12} \text{ cm}$$

٢ـ احسب اقرب مسافة دنو لجسيم الفا في السؤال السابق •

تعطي معادلة المدار (٦ـ ٦١) مسافة اقرب دنو عندما تكون $\Theta = \Theta_o$ ، اى

$$r_{min} = \frac{mh^2Q^{-1}q^{-1}}{-1 + (1+2Emh^2Q^{-2}q^{-2})^{\frac{1}{2}}} \qquad (٦ـ ٦٦)$$

عند استخدام المعادلتين (٦ ـ ٦٤) و (٦ـ ٦٥) ، يمكن كتابة المعادلة السابقة ، بعد تبسيطها قليلا على النحو التالي ـ

$$r_{min} = \frac{p \cot(\phi/2)}{-1+\left[1+\cot^2(\phi/2)\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{p \cos(\phi/2)}{1-\sin(\phi/2)} \qquad (٦ـ ٦٧)$$

اذن عندما ϕ تساوى ٩٠ درجة ، نجد

$$r_{min} = 2.41\ p = 5.1 \times 10^{-12}\ cm.$$

لاحظ ان المعادلتين (٦ـ ٦٦) و (٦ـ ٦٧) تصبحان معادلتين غير محددتين indeterminate عندما $h = p = 0$. وفي هذه الحالة يصوب الجسيم مباشرة نحو النواة . ويقترب منها على طول خط مستقيم ، وتتنافرا معها باستمرار بقوة كولوم ، فيتناقص انطلاقه الى الصفر عندما يصل الى نقطة معينة ، r_{min} ، ثم من هذه النقطة يعود على طول المستقيم نفسه ، اى بزاوية انحراف مقدارها ١٨٠ درجة . وفي هذه الحالة يمكن ايجاد قيمة r_{min} باستخدام حقيقة كون الطاقة E ثابتة . الطاقة الكامنة في نقطة الرجوع تساوى Qq/r_{min} ، والطاقة الحركية تساوى صفرا .

اذن

$$E = \tfrac{1}{2}mv_o^2 = Qq/r_{min}$$

و

$$r_{min} = \frac{Qq}{E} \qquad (٦ـ ٦٨)$$

رأينا ان $r_{min} \simeq 10^{-12}cm$ لجسيمات الفا المنبعثة من الراديوم والمنحرفة بنويات الذهب عندما تكون زاوية الانحراف تساوى ١٨٠ درجة . ان ملاحظة هذه الانحرافات تبين ان نصف قطر النواة بحدود $١٠^{-١٢}$ سم

٦ـ١٣) الحركة في مدارات تقرب من الدائريه ـ الاستقرار*

Motion in a Nearly Circular Orbit-Stability

من الممكن الحصول على مسار دائرى تحت تأثير اى قوة تجاذب مركزية ، ولكن ليست جميع القوى المركزية تحدث مدارات دائرية مستقرة . ولنناقش السؤال التالي ، اذا كان جسيم يتحرك في مدار دائرى وعانى اضطرابا صغيرا ، فهل يبقى المدار الناشىء قريبا من المسار الدائرى الاصلي ؟ لكي نجيب على هذا السؤال ، نعود الى المعادلة التفاضلية القطبية للحركة ، اى المعادلة (٦ـ ٢٢) .

لما كانت $\dot{\theta}=h/r^2$ ، فيمكننا كتابة المعادلة القطبية على النحو التالي

$$m\ddot{r} - \frac{mh^2}{r^3} = f(r) \qquad (٦ـ ٦٩)$$

الآن ، للمدار الدائرى ، r ثابتة اى ، $\ddot{r} = 0$. اذن ، عند تسمية نصف قطر المدار الدائرى " a " نحصل على

$$-\frac{mh^2}{a^3} = f(a) \qquad (٦ـ ٧٠)$$

للقوة عندما $r = a$.

الآن لنعبر عن الحركة القطبية بدلالة المتغير x الذى يعرف كالاتي

$$x = r - a \qquad (٦ـ ٧١)$$

عندئذ يمكن كتابة المعادلة (٦ـ ٦٩) على النحو التالي

$$m\ddot{x} - mh^2 (x + a)^{-3} = f(x + a) \qquad (٦ـ ٧٢)$$

وبفك الحدين اللذين يحتويان على $x + a$ كمتسلسلة اساسية في x ، نحصل على

$$m\ddot{x} - mh^2a^{-3}(1 - 3\frac{x}{a} + ..) = f(a) + f'(a)\, x + .. \qquad (٦ـ ٧٣)$$

وتختصر هذه المعادلة استنادا الى العلاقة المبينة في المعادلة (٦ـ ٧٠) الى

$$m\ddot{x} + \left[\frac{-3}{a}\, f(a) - f'(a)\right] x = 0 \qquad (٦ـ ٧٤)$$

هذا اذا اهملنا الحدود التي تحتوى على x^2 فما فوق • واذا كان معامل x (الكمية التي في داخل الاقواس) في المعادلة السابقة موجبا ، عندئذ تكون المعادلة هي نفس معادلة المتذبذب التوافقي البسيط • وفي هذه الحالة ، اذا اقلق الجسيم ، فسيتذبذب توافقيا حول الدائرة $r=a$ ، بحيث يكون المدار الدائري مستقرا • وبالعكس ، اذا كان معامل x سالبا في المعادلة (٦ــ ٧٤) ، فعندئذ تكون الحركة غير متذبذبة والنتيجة هي ازدياد x اسيا exponentially مع الزمن ، والمدار غير مستقر • (اذا كانت معامل x تساوى صفرا ، عندئذ يجب ان يحتوى المفكوك على الحدود العالية لاجل حساب الاستقرار) • اذن ، يمكننا القول ان المدار الدائرى الذى نصف قطره a يكون مستقرا اذا كانت دالة القوة $f(r)$ تستوفي المتباينة

$$f(a) + \frac{a}{3} f'(a) < 0 \qquad (٦ــ ٧٥)$$

وبصورة خاصة ، اذا كانت دالة القوة القطبية مرفوعة الى اى أس ، اى أن

$$f(r) = -cr^n$$

عندئذ يكون شرط الاستقرار كما يلي

$$-ca^n - \frac{a}{3} cna^{n-1} < 0$$

وعند تبسيطه يصبح

$$n > -3 \qquad (٦ــ ٧٦)$$

اذن قانون التربيع العكسي ($n = -2$) يعطي مدارات دائرية مستقرة ، كما هو الحال في قانون المسافة المباشرة ($n = 1$) • والحالة الاخيرة هي لمتذبذب توافقي يتذبذب في بعدين • وللقوة الرابعة العكسية ($n = -4$) تكون المدارات الدائرية غير مستقرة • ويمكن ايضا البرهنة على ان المدارات الدائرية غير مستقرة لقانون التكعيب العكسي للقوة ($n = -3$) • ولاثبات ذلك فمن الضرورى ادخال حدود مرفوعة الى قوى اكبر من واحد في المعادلة القطبية •

٦ـ١٤) القبا والزوايا القبوية للمدارات التي تقترب من الدائرية

Apsides and Apsidal Angles for Nearly Circular Orbits

الاوج او القبا هو نقطة في مدار يكون فيها متجه نصف القطر في نهايته الصغرى او العظمى . ان نقاط الحضيض الشمسي والاوج هي اقباء لانصاف اقطار المدارات . والزاوية التي يقطعها متجه نصف القطر بين قبوين متتاليين تسمى بالزاوية القبوية . فالزاوية القبوية اذن تساوى π للمدارات الاهليلجية تحت تأثير قانون التربيع العكسي للقوة .

رأينا في حالة الحركة التي تقترب من المدار الدائرى ، ان r تتذبذب حول الدائرة $r = a$ (اذا كان المدار مستقرا) . ومن المعادلة (٦ـ ٧٤) ينتج ان زمن الذبذبة τ_r لهذا التذبذب هو ـ

$$\tau_r = 2\pi \sqrt{\frac{m}{-\left[\frac{3}{a} f(a) + f'(a)\right]}} \qquad (٦ـ ٧٧)$$

في هذه الحالة تكون الزاوية القبوية مساوية تماما لمقدار الزيادة في الزاوية القطبية θ خلال الفترة الزمنية التي يتذبذب فيها r من قيمة النهاية الصغرى الى قيمة النهاية العظمى التالية . اى ان هذا الزمن يساوى $\frac{1}{2}\tau_r$. ولما كانت $\dot{\theta} = h/r^2$ ، اذن تبقى $\dot{\theta}$ ثابتة تقريبا ، ويمكننا كتابتها كما يلي ـ

$$\dot{\theta} \simeq \frac{h}{a^2} = \left[-\frac{f(a)}{ma}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (٦ـ ٧٨)$$

وقد نتجت الخطوة الاخيرة من المعادلة (٦ـ ٧٠) . اذن الزاوية القبوية تعطى من

$$\psi = \tfrac{1}{2}\tau_r\dot{\theta} = \pi\left[3 + a\frac{f'(a)}{f(a)}\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (٦ـ ٧٩)$$

اذ ن لقانون القــوة الاساسي

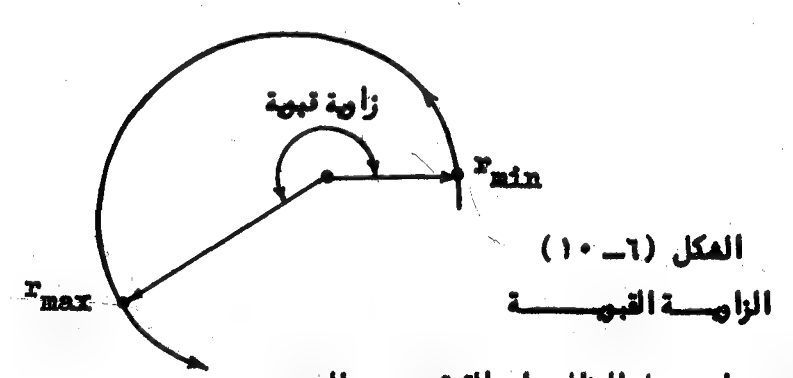
$$f(r) = -cr^n$$

نحصل علــى

$$\psi = \pi(3+n)^{-\frac{1}{2}} \qquad (٦ـ ٨٠)$$

في هذه الحالة تكون الزاويــة القبويــة مستقلة عن حجم المدار ، فالمدار يكـــــون تكراريا او ثنائي الدخول ، في حالة قانون التربيع العكسي ($n = -2$) الـذى تكون فيه $\psi = \pi$ وكذلك في حالة القانون الخطي ($n = 1$) الذى تكون فيــه $\psi = \frac{\pi}{2}$.وعلى اية حال اذا كانت $n = 2$ مثلا ، عندئذ $\psi = \pi/\sqrt{5}$ وهو عـدد اصم لمضاعفات π ، ولذلك لاتعيد الحركة نفسها ．

واذا ابتعد قانون القوة قليلا عن قانون التربيع العكسي ، فعندئذ اما ان تتقـدم الاقباء او تتأخر باستمرار ، ويعتمد ذلك على ما اذا كانت الزاوية القبوية اكبر قليـــلا او اصغر قليلا من π ．(انظر الشكل ٦ـ١٠) ．



الشكل (٦ـ ١٠)
الزاويـــــة القبويـــــة

لنفرض ، على سبيل المثال ، ان القوة هي من النوع

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{\epsilon}{r^4} \qquad (٦ـ ٨١)$$

حيث ϵ صغيرا جدا ． (هذا هو نوع دالة القوة في سطح حلقة ، كما هو واضح من المثال ٢ ، بند ٦ـ٣) ． الزاويـــة القبويـــة ، مـن المعادلـــة (٦ ـ ٧٩)

هي

$$\Psi = \pi \left(3 + a\,\frac{2ka^{-3} + 4\epsilon a^{-5}}{-ka^{-2} - \epsilon a^{-4}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \pi \left(\frac{1 - \epsilon k^{-1}a^{-2}}{1 + \epsilon k^{-1}a^{-2}}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq \pi\left(1 + \frac{\epsilon}{ka^{2}}\right) \qquad (٦ـ ٨٢)$$

وقد اهملنا في الخطوة الاخيرة حدود الكمية ϵ/ka^2 المرفوعة الى اسس اكبر من واحد . نرى ان الاقباء تتقدم اذا كانت ϵ موجبة ، بينما تتأخر اذا كانت ϵ سالبة .

لقد قرب اضطراب الجاذبية لكوكب معين بسبب الكواكب الاخرى في المنظومة الشمسية بالحد ϵ/r^4 في المعادلة (٦ـ ٨١) . ويمكن اعتبار ظاهرة التجمع لاحد الكواكب السيارة تقريبا هي نفسها فيما لو انتشرت على شكل حلقة . (انظر المعادلة ٦ـ ١٣) وعند حساب الاضطرابات لعطارد ، الكوكب الاعمق ، نجد ان الحضيض الشمسي لهذا الكوكب يحدث تقدما مقداره ٥٣١ ثانية في القوس لكل قرن . لكن التقدم المقاس هو ٥٧٤ ثانية في القرن . هذا الفرق الذى مقداره ٤٣ ثانية قد فسر بالنظرية النسبية العامة لانشتاين (٢).

يبتعد مجال الجاذبية بالقرب من الارض قليلا من قانون التربيع العكسي ، لان الارض ليست كروية تماما . وبسبب هذا تقدم الحضيض القمرى للتابع الصناعي الذى يقع مداره بالقرب من مستوى الاستواء باستمرار باتجاه حركة التابع . ان ملاحظة هذا التقدم كانت احدى الطرق الدقيقة لحساب شكل الارض . فقد بينت هذه الملاحظات ان شكل الارض يقرب من الشكل الكمثري . واضافة الى حدوث تقدم في الحضيض القمرى للتابع الدائر فان تفلطح الارض يسبب أيضا طوافا precess لسطح المدار اذا لم يكن المدار في مستوى السطح الاستوائي الارضي .

---

(٢) يوجد تقدم متبق صغير بسبب تفلطح الشمس . هذا التقدم غير ثابت ولكن قد يكون اقل من ثانية واحدة في القرن .

تمارين

٦ــ ١) اثبت ان قوة الجاذبية على جسيم داخل قشرة كروية رقيقة تساوى صفرا بطريقة (آ) ايجاد القوة مباشرة و (ب) البرهنة على ان جهد الجاذبية ثابت ٠

٦ــ٢) اذا فرضنا ان الكرة الارضية منتظمة وثقبت من قطبها الشمالي الى قطبها الجنوبي ثم اسقط جسيم في الثقب المستقيم ٠ برهن على ان حركته ستكون توافقية بسيطة ثم جد زمن دورة هذه الحركة ٠

٦ــ٣) جد قانون القوة على كوكب اذا كانت المجموعة الشمسية مغمورة في غبار سحابي منتظم كثافته ρ ٠

٦ــ٤) جسيم ينزلق داخل انبوب مستقيم املس يمر بصورة مائلة خلال الارض ٠ اثبت ان الحركة ستكون توافقية بسيطة ولها نفس زمن دورة التمرين (٦ــ ٢) اهمل تأثيرات الدوران ٠

٦ــ٥) جد جهد الجاذبية والقوة على جسيم احادى الكتلة وموضوع على محور حلقة رقيقة نصف قطرها a وكتلتها M. اذا كان جسيم الاختبار على مسافة r من مركز الحلقة ٠

٦ــ ٦) يتحرك جسيم في مجال مركزى بالمدار الحلزوني $r=ae^{k\theta}$ ٠ جد قانون القوة ٠ ثم بين كيف تتغير θ مع الزمن t ٠

٦ــ٧) اذا كان مدار جسيم دائرى ويقع مركز القوة على محيط الدائرة ٠ فما هو قانون القوة ؟

٦ــ ٨) اذا تحرك جسيم في مجال التكعيب العكسي للقوة ٠ جد المدارات الممكنة ٠

٦ــ٩) اذا تحرك جسيم في المدار الحلزوني

$$r = a\theta^3$$

وكانت θ تتغير مع الزمن t وفقا للمعادلة

$$\theta = ct^3$$

هل يكون مجال القـوة مركزياً ؟ فان لم يكن كذلك فكيف تتغير θ مع الزمـــن t اذا كانت القـوة مركزيـة ؟

٦ـ١٠) يتحرك قمر صاروخي بالقرب من الارض مبتدئاً بمدار دائرى ، فاذا رغبنا في وضع القمر في مدار جديد بحيث تكون مسافة نقطة الاوج مساوية لنصف قطر مدار القمـــر حول الارض (٢٤٠٠٠٠ ميل) (آ) احسب نسبة الانطلاق الجديد الى انطلاقـــه في المدار الدائري اللازمة لانجاز ذلك ، افرض ان نصف قطر المدار الدائرى الاصلي يساوى ٤٠٠٠ ميل (ب) احسب بعد نقطة الاوج الجديدة اذا كانت نســـبة الانطلاق ٩٩ر٠ من القيمـة المحسوبة اعلاه ، هذه المسألة توضح الدقة المتناهيـة اللازمة لانجاز المدار حول القمـر .

٦ـ١١) اذا كان المحور الرئيسي لمدار مذنب اهليليجي يساوى ١٠٠ وحدة فلكيـــة (آ) ماهو زمن الدورة ؟ (ب) اذا كان بعده عن الشمس يساوى ٥ ر٠ وحدة فلكيـة في الحضيض الشمسي ، فما هي قيمـة الاختلاف المركزى للمدار ؟ (ج) ماهو انطلاق المذنب في الحضيض الشمسي والاوج .

٦ـ١٢) لوحظ ان انطلاق كوكب يساوى v_a عندما يكون على مسافة r_a من الشمس ، واتجاه حركتـه يصنع زاويـة ϕ مع متجـه نصف القطر من الشمس ، برهن علـى ان المحور الرئيسي لمدار الكوكب الاهليليجي يصنع زاويـة مع متجـه نصف قطـــــر

$$\cot^{-1}\left(\tan\phi - \frac{2r_e v_e^2}{r_a v_a^2}\csc 2\phi\right)$$

الكوكب الابتدائي ، حيث r_e و v_e يمثلان نصف قطر مدار الارض وانطلاقـهـا على التتالـي .

٦ـ١٣) لوحظ مذنب في البداية على مسافة $\frac{1}{2}$ وحدة فلكية من الشمس ويسير بانطلاق يساوى ضعف انطلاق الارض ، بين من علاقة الطاقة ، فيما اذا كان مدار المذنـــب

قطعا ناقصا مكافئا اوقطعا زائدا ٠

٦ـ١٤) يسير مذنب في مدار على شكل قطع مكافئ واقع في مستوى مدار الارض ٠ فاذا فرضنا ان ، مدار الارض دائرى الشكل نصف قطره a ، اثبت ان النقاط التي يقطع فيها المذنب مدار الارض هي

$$\cos\theta = -1 + \frac{2p}{a}$$

حيث p تمثل مسافة الحضيض الشمسي للمذنب كما عرفت في $\theta = 0$ ٠

٦ـ١٥) استخدم نتيجة التمرين السابق للبرهنة على ان الفترة الزمنية التي يبقى فيها المذنب داخل مدار الارض هي الكسر ٠

$$\frac{2^{\frac{1}{2}}}{3\pi}\left(\frac{2p}{a} + 1\right)\left(1 - \frac{p}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

من السنة ، والقيمة العظمى لهذه الفترة الزمنية هي $\frac{2}{3\pi}$ سنة ، او حوالي ١١ اسبوع ٠

٦ـ ١٦) يتحرك جسيم في مجال مركزى فيه قانون القوة

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} + \frac{\epsilon}{r^3}$$

جد معادلة المدار ٠ برهن بصورة خاصة ، عندما تكون ϵ صغيرة يكون المدار قطعاً ناقصاً طائفاً ببطء ٠

٦ـ ١٧) برهن النص في البند (٦ـ١٠) الذى يقول ان ، معدل زمن الطاقة الكامنة لجسيم يتحرك بمدار قطع ناقص في مجال التربيع العكسي للقوة $f(r) = -\frac{k}{r^2}$ هو $-k/a$ حيث a يمثل نصف المحور الرئيسي للقطع الناقص ٠

٦ـ ١٨) جد الزاوية القبوية لمدارات تقترب من الدائرة في مجال مركزى فيه قانون القوة كما يلي

$$f(r) = -k\frac{e^{-br}}{r^2}$$

٦ـ ١٩) يتحرك جسيم بمدار قطع ناقص في مجال التربيع العكسي للقـوة • اثبـت ان حاصل ضرب انطلاقي النهاية العظمى والصغرى يسـاوى $(2\pi a/\tau)^2$ حيث a تمثل نصف المحور الرئيسي و τ زمن الدورة •

٦ـ٢٠) برهن على ان المدار الدائرى الذى نصف قطره r في التمريـن (٦ ـ ١٨) مستقرا اذا كانت r اقل من b^{-1} .

٦ـ ٢١) اثبت ان المعادلة التفاضلية القطبيـة لحركـة جسيم في مجـال مركـزى ، المعادلة (٦ـ ٦٩) ، هي نفس معادلة الجسيم الذى يتحرك على خط مستقيم تحت تأثير "الجهد الفعلي effective potential" U(r) والذى يسـاوى

$$U(r) = V(r) + \frac{mh^2}{2r^2}$$

حيث القـوة الحقيقية $f(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$ • ارسم خطا بيانيا تقريبيا للجهـد (r) U لحالة المدار الدائرى المستقر ، مثل $V(r) = -k/r$ ، وللمدار غير المستقر مثل $V(r) = -k/r^3$.

٦ـ٢٢) اثبت ان شرط الاستقرار لمدار دائرى نصف قطره a يكافيء الشـرط $d^2U/dr^2 > 0$ عندما تكون r=a حيث (r) U تمثل " الجهد الفعلي " الـذى عرف في التمرين السابق •

٦ـ٢٣) جد الشرط الذى تكون فيـه المدارات الدائرية مستقرة اذا كانت دالـة القـوة في المجال المركزى على الشكل التالي

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{\epsilon}{r^4}$$

٦ـ٢٤) اذا انغمرت المجموعة الشمسية في سحاب غبارى منتظم (التمرين " ٦ ـ ٣ ") فما هي الزاوية القبوية لكوكب يتحرك بمدار يقرب من الدائرى ؟ لقد اقترح هـذا

السؤال سابقا كتوضيح ممكن لتقدم الحضيض الشمسي لعطارد ·

٦ـ٢٥) الكتب المتقدمة لموضوع نظرية الجهد تبين ان الطاقة الكامنة لجسيم كتلته m في مجال جاذبية جسم كروى مفلطح مشابه للكرة الارضية هو تقريبا

$$V(r) = -\frac{k}{r}\left(1 + \frac{\epsilon}{r^2}\right)$$

حيث r تشير الى مسافات المستوى الاستوائي ، $k = GMm$ كالسابق ، و $\epsilon = (\frac{2}{5})R\,\Delta R$ حيث R تمثل نصف القطر الاستوائي و ΔR هي الفرق بين الاستوائي وانصاف الاقطار القطبية · جد الزاوية القبوية لتابع صناعي في مدار يقرب من الدائرى في مستوى الاستواء الارضي حيث $R = 4000$ mi و $\Delta R = 13$ mi ·

٦ـ٢٦) وفقا للنظرية النسبية ، الجسيم الذى يتحرك في مجال مركزى بطاقة كامنة مقدارها $V(r)$ سيكون له نفس المدار الذى يعمله جسيم طاقته الكامنة

$$V(r) - \frac{\left[E - V(r)\right]^2}{2mc^2}$$

وفقا للميكانيك الكلاسيكي · حيث E تمثل الطاقة الكلية و m كتلة الجسيم و c سرعة الضوء · من هذه ، جد الزاوية القبوية للحركة في مجال التربيع العكسي للقوة $V(r) = -k/r$.

الفصـــل الســـابع

دايناميك منظومـة الجسـيمـات

Dynamics of a System of Particles

لدراسة منظومـة او مجموعـة كبيرة من الجسيمات الحرة ، سوف نركز اهتمامنـــــا بالدرجة الاولى على المظهر العام لحركـة تلك المجموعـة .

٧ـ١) مركـز الكتلـة والزخم الخطي

Center of Mass and Linear Momentum

تتكون منظومتنا العامة من n جسيمة كتلتها m_1 ، m_2 ، ...... ، m_n ومتجهات مواضعها $\vec{r}_1$ ، $\vec{r}_2$ ، $\vec{r}_3$ ، ..... ، $\vec{r}_n$ على التالــــي . ونعرف مركـز كتلـة المنظومـة بالنقطـة التي متجـه موضعها $\vec{r}_{cm}$ (الشكل ٧ـ ١) كما يلـي

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{m} \qquad (٧ـ ١)$$

حيث $m = \sum m_i$ تمثل الكتلـة الكليـة للمنظومـة . ومن الواضـح ان التعريـف المذكور اعلاه يكافيء المعادلات الثلاث التالية ــ

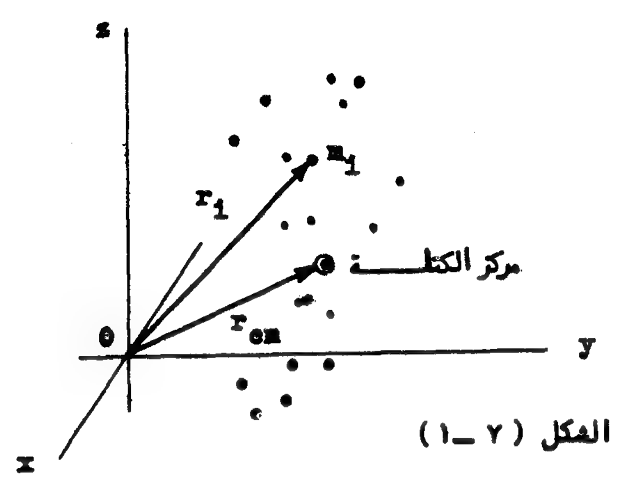
$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{m} \qquad y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{m} \qquad z_{cm} = \frac{\sum m_i z_i}{m}$$

ونعرّف الزخم الخطي $\vec{p}$ للمنظومـة بالمجموع الاتجاهي لعزوم الجســـيمات المنفردة ، اى

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i\vec{v}_i \qquad (٧ـ ٢)$$

ومن تفاضل المعادلـة (٧ـ ١) بالنسبة للزمـن نحصـل علـى

$$\vec{p} = \sum m_i\vec{v}_i = m\vec{v}_{cm} \qquad (٧ـ ٣)$$



الشكل (٧ ـ ١)

مركز الكتلة لمنظومة من الجسيمات

اى ان الزخم الخطي لمنظومة من الجسيمات يساوى سرعة مركز الكتلة مضروبة في الكتلة الكلية للمنظومة ·

افرض الآن وجود قوى خارجية مثل $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ ، ······ ، $\vec{F}_i$ ، ···· ، $\vec{F}_n$ تؤثر على الجسيمات المناظره (اى ان F_1 تؤثر على m_1 و F_2 تؤثر على m_2 ··· الخ) · وبالاضافة الى ذلك قد توجد قوى تصادم داخلية بين اى جسيمين في المنظومة · وسنرمز لهذه القوى الداخلية بـ $\vec{F}_{ij}$ الذى يعني القوة المؤثرة على الجسيم i من قبل الجسيم j · فمعادلة الحركة للجسيم i عندئذ تكون ـ

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n}{}' \vec{F}_{ij} = m_i\ddot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{P}}_i \qquad (٧ـ٤)$$

حيث $\vec{F}_i$ تعني القوة الخارجية الكلية المؤثرة على الجسيم i · ويمثل الحد الثاني في المعادلة السابقة المجموع الاتجاهي لجميع القوى الداخلية المؤثرة على الجسيم i من جميع الجسيمات الاخرى للمنظومة (تعني الفتحة على علامة الجمع استثناء الحد $i = j$) · وعند جمع المعادلة (٧ـ٤) لـ n من الجسيمات ·

نحصل على

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n}{}' \vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{p}}_i \qquad (٧-٥)$$

ومعني الجمع الثنائي المذكور اعلاه ، ان لكل قوة $\vec{F}_{ij}$ يوجد ايضا قوة $\vec{F}_{ji}$ وهاتان القوتان متساويتان ومتضادتان ، اى ان

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \qquad (٧-٦)$$

وفقا لقانون نيوتن الثالث للفعل ورد الفعل . لذلك تختصر القوى الداخلية بأزواج وتتلاشى الجمع الثنائي . اذن يمكننا كتابة المعادلة (٧-٥) كالاتي -

$$\sum \vec{F}_i = \sum \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{p}} = m\vec{a}_{cm} \qquad (٧-٧)$$

وبالكلمات : ان تعجيل مركز الكتلة لمنظومة من الجسيمات هو نفس تعجيل جسيم منفرد كتلته تساوى الكتلة الكلية للمنظومة تحت تأثير مجموع القوى الخارجية .

افرض ، على سبيل المثال ، عددا من الجسيمات تتحرك في مجال جاذبية منتظم . ولما كان $\vec{F}_i = m_i\vec{g}$ لكل جسيم عندئذ -

$$\sum \vec{F}_i = \sum m_i\vec{g} = m\vec{g}$$

وتنتج الخطوة الاخيرة لان $\vec{g}$ ثابتة . اذن

$$\vec{a}_{cm} = \vec{g} \qquad (٧-٨)$$

هذه هي نفس معادلة الجسيم المنفرد او القذيفة .

اذن يكون مسار مركز كتلة الشظايا المتطايرة من قنبلة مدفع متفجرة في الهواء هو نفس مسار القطع المكافئ الذى تسلكه القذيفة في حالة عدم انفجارها .

وفي الحالة الخاصة التي لاتوجد فيها قوى خارجية تؤثر على المنظومة (او اذا كانت $\sum \vec{F_i} = 0$) ، عندئذ $\vec{a}_{cm}$ يساوي صفرا و $\vec{v}_{cm}$ تكون ثابتة ، لذلك يبقى الزخم الخطي للمنظومة ثابتا ·

$$\sum \vec{p_i} = \vec{p} = m\vec{v}_{cm} = \text{constant} \qquad (٧ــ ٩)$$

هذه هي قاعدة حفظ الزخم الخطي · ان ثبوت الزخم الخطي في الميكانيك النيوتوني لمنظومة معزولة يرتبط مباشرة بقانون نيوتن الثالث ، وفي الحقيقة هو نتيجة له ، وحتى في الحالات التي تكون فيها القوى بين الجسيمات لاتخضع بصورة مباشرة لقانون الفعل ورد الفعل ، مثل قوى المغناطيسية بين الشحنات المتحركة ، تبقى قاعدة حفظ الزخم الخطي صحيحة عندما يحسب الزخم الخطي الكلي للجسيمات والمجال الالكترو مغناطيسي (١) .

٧ــ ٢) الزخم الزاوي للمنظومة

Angular Momentum of a System

كما ورد في البند (٦ــ٥) ، الزخم الزاوي لجسيم منفرد عُرّف بالضرب الاتجاهي $\vec{r} \times m\vec{v}$. لذلك يعرف الزخم الزاوي $\vec{L}$ لمنظومة جسيمات بالجمع الاتجاهي لزخوم الجسيمات الزاوية ، هي

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r_i} \times m_i\vec{v_i})$$

لنحسب مشتقة الزمن للزخم الزاوي ، وباستعمال قانون التفاضل للضرب الاتجاهي نجد ان ــ

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{v_i} \times m_i\vec{v_i}) + \sum_{i=1}^{n} (\vec{r_i} \times m_i\vec{a_i}) \qquad (٧ ــ ١٠)$$

---

(١) انظر على سبيل المثال

W. T. Scott, The Physics of Electricity and Magnetism, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.

ان الحد الاول في يمين المعادلة يساوى صفرا ، لان $\vec{v}_i \times \vec{v}_i = 0$ ولما كـــان $m_i \vec{a}_i$ يساوى القـوة الكلية المؤثرة على الجسيم i ، لذلك يمكننا كتابـة ـ

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n}{}' \vec{F}_{ij}\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n}{}' \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \qquad (٧ ـ ١١)$$

حيث ، كما في البند (٧ـ١) ، $\vec{F}_i$ تمثل القوة الخارجية الكلية على الجسـيم i و $\vec{F}_{ij}$ تمثل القـوة (الداخلية) المؤثرة على الجسيم i من اى جسيم آخـر مثل j . ويتكون الجمع الثنائي في يمين المعادلة من حدود مزدوجة على الشـكل التالـي ـ

$$(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}) + (\vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}) \qquad (٧ ـ ١٢)$$

وعند تمثيل متجـه الازاحـة للجسيم j بالنسبة للجسيم i بالرمـز $\vec{r}_{ij}$ نرى من المثلث المبين في الشكل (٧ ـ ٢) ان

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i \qquad (٧ ـ ١٣)$$

الشـكل (٧ ـ ٢)
تعريف المتجـه $\vec{r}_{ij}$.

ولما كان $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ij}$ لذلك تبسط العلاقـة (٧ـ ١٢) الى

$$-\vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij} \qquad (٧ ـ ١٤)$$

الذى يساوى صفرا عندما تكون القوى الداخلية مركزيـة ، اى اذا كانت تؤثر على طـول

الخطوط التي تربط كل زوج من الجسيمات. فالجمع الثنائي ، في المعادلة (٧ ـ ١١)، اذن يساوى صفرا . والضرب الاتجاهي $\vec{r}_i \times \vec{F}_i$ كما عرف ، في البند (١ ـ ١٢)، هو عزم القوة الخارجية $\vec{F}_i$. والمجموع $\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ هو اذن العزم الكلي لجميع القوى الخارجية المؤثرة على المنظومة . فاذا مثلنا العزم الخارجي الكلي بـ $\vec{N}$ ، عندئذ تصبح المعادلة (٧ ـ ١١) كما يلي ـ

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \qquad (٧ ـ ١٥)$$

اى ان ، المعدل الزمني لتغير الزخم الزاوى لمنظومة يساوى مجموع عزوم القوى الخارجية المؤثرة على المنظومة .

اذا كانت المنظومة معزولة ، عندئذ $\vec{N} = 0$ ، اى يبقى الزخم الزاوى ثابتا في المقدار والاتجاه .

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = \text{constant} \qquad (٧ ـ ١٦)$$

هذه صياغة لقاعدة حفظ الزخم الزاوى . وهي تعميم للمعادلة (٦ ـ ١٨) لجسيم منفرد في مجال مركزى . كثبوت الزخم الخطي الذى بحث في البند السابق ، كذلك الزخم الزاوى لمنظومة شحنات متحركة معزولة يكون ثابتا ، عند اعتبار الزخم الزاوى للمجال الكهرومغناطيسي (٢) .

٧ ـ ٣) الطاقة الحركية لمنظومة جسيمات

Kinetic Energy of a System of Particles

الطاقة الحركية الكلية T لمنظومة جسيمات تساوى مجموع طاقات الجسيمات في المنظومة ، اى

$$T = \sum \tfrac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum \tfrac{1}{2}m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) \qquad (٧ ـ ١٧)$$

---

(١) انظر ملاحظة (١) .

وكما هو واضح من ألشكل (٧ ـ ٣) ، يمكننا التعبير عن متجه كل موضع $\vec{r}_i$ على النحو التالي

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}\,'_i \qquad (٧ ـ ١٨)$$

حيث $\vec{r}\,'_i$ يمثل موضع الجسيم i بالنسبة الى مركز الكتلة . وعند التفاضل بالنسبة للزمن t ، نحصل على

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}\,'_i \qquad (٧ ـ ١٩)$$

حيث $\vec{v}_{cm}$ تمثل سرعة مركز الكتلة و $\vec{v}\,'_i$ سرعة الجسيم i بالنسبة الى مركز الكتلة ، اذن يمكن كتابة T على النحو التالي

$$T = \sum \tfrac{1}{2} m_i (\vec{v}_{cm} + \vec{v}\,'_i)\cdot(\vec{v}_{cm} + \vec{v}\,'_i)$$
$$= \sum \tfrac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum m_i (\vec{v}_{cm}\cdot\vec{v}\,'_i) + \sum \tfrac{1}{2} m_i v'^2_i$$
$$= \tfrac{1}{2} v_{cm}^2 \sum m_i + \vec{v}_c \cdot \sum m_i \vec{v}\,'_i$$
$$+ \sum \tfrac{1}{2} m_i v'^2_i$$

الشكل (٧ ـ ٣)
تعريف $\vec{r}\,'_i$

من المعادلة (٧ ـ ١٨) ، عندنا

$$\sum m_i \vec{r}\,'_i = \sum m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{cm}) =$$

وبالتماثل ، نحصل على

$$\sum m_i \vec{v}\,'_i = 0$$
$$= \sum m_i \vec{r}_i - m\vec{r}_{cm} = 0$$

اذن تبسط معادلة الطاقة الحركية الى

$$T = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \sum \frac{1}{2}m_i\overline{v}_i^2 \qquad (٧-٢٠)$$

الطاقة الحركية الكلية لمنظومة جسيمات اذن ، تساوى مجموع الطاقة الحركية الانتقالية لمركز الكتلة (الحد الاول على اليمين) زائداً مجموع الطاقات الحركية لجسيمات المنظومة بالنسبة لمركز الكتلة (الحد الاخير) • وهذا الفرز في الطاقة الحركية الى اجزائها مفيد في حالات كثيرة ، كما في الفيزياء الجزيئية • لان ، الطاقة الحركية الكلية للجزيئة تتكون من الطاقة الانتقالية للجزيئة ككل زائدا الطاقة الذبذبية والدورانية داخل الجزيئة •

٧-٤) حركة جسمين يؤثر احدهما على الآخر • الكتلة المصغرة •

Motion of Two Interacting Bodies. The Reduced Mass

لنفرض حركة منظومة متكونة من جسمين (تعامل كجسيمين) يؤثر احدهما على الآخر بقوة مركزية • سنفرض ان المنظومة معزولة ، اذن يتحرك مركز الكتلة بسرعة ثابتة • وللسهولة سنأخذ مركز الكتلة في نقطة الاصل • عندئذ نحصل على

$$m_1\overline{r}_1 + m_2\overline{r}_2 = 0 \qquad (٧-٢١)$$

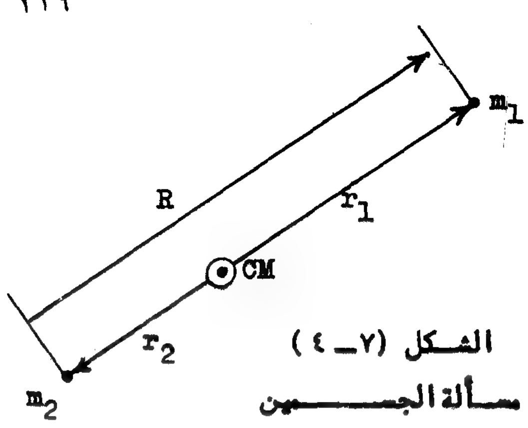
حيث كما هو واضح من الشكل (٧-٤) ، ان المتجهات $\overline{r}_1$ و $\overline{r}_2$ تمثل مواضع الجسيمات m_1 و m_2 ، على التتالي ، بالنسبة الى مركز الكتلة • فاذا كانت $\overline{R}$ تمثل موضع الجسيم "1" بالنسبة الى الجسيم "2" عندئذ -

$$\overline{R} = \overline{r}_1 - \overline{r}_2 = \overline{r}_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \qquad (٧-٢٢)$$

وتنتج الخطوة الاخيرة من المعادلة (٧-٢١) •

ان المعادلة التفاضلية لحركة الجسيم "1" بالنسبة الى مركز الكتلة هي -

$$m_1\frac{d^2\overline{r}_1}{dt^2} = \overline{F}_1 = f(R)\,\frac{\overline{R}}{R} \qquad (٧-٢٣)$$



الشكل (٧ـ ٤)
مسألة الجسمين

حيث $f(R)$ تمثل مقدار القوة المتبادلة بين الجسيمين . وباستعمال المعادلة (٧ـ ٢٢) يمكننا كتابة ـ

$$\mu \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = f(R) \frac{\vec{R}}{R} \qquad (٧ـ ٢٤)$$

حيث ـ

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad (٧ـ ٢٥)$$

وتسمى الكمية μ بالكتلة المصغرة reduced mass . المعادلة الجديدة للحركة (٧ـ ٢٤) ، تعطي حركة الجسيم 1 بالنسبة الى الجسيم 2 هذه المعادلة هي تماما نفس المعادلة الاعتيادية لحركة جسيم منفرد كتلته μ يتحرك في مجال قوة مركزي يعطى من $f(R)$. لذلك اخذت بنظر الاعتبار حركة m_2 بالنسبة الى مركز الكتلة اوتوماتيكيا وذلك باحلال الكتلة المصغرة μ محل m_1 . واذا كان للجسمين نفس الكتلة m ، عندئذ $\mu = m/2$. وبالعكس ، اذا كانت m_2 اكبر بكثير من m_1 بحيث تصبح m_1/m_2 صغيرة جدا ، عندئذ تقترب قيمة μ من m_1 .

ولجسمين يجذب احدهما الآخر تثاقليا ، يكون عندنا

$$f(R) = -\frac{Gm_1m_2}{R^2} \qquad (٧-٢٦)$$

وفي هذه الحالة تكون معادلة الحركة

$$\mu\ddot{\vec{R}} = -\frac{Gm_1m_2}{R^2}\left(\frac{\vec{R}}{R}\right) \qquad (٧-٢٧)$$

وهذه تماثل معادلة جسيم منفرد في مجال التربيع العكسي المركزى (كما بحث في البند ٦ ـ ٨) . ولما كان اختيار الرموز السفلية (subscripts) اعتباطيا ، نستنتج ان كل جسيم يتحرك بقطع ناقص مركزى حول الآخر ومتخذا كل منهما الآخر كبؤرة له . اذن ، عند اعتبار الارض والقمر منظومة معزولة ، فالقمر يتحرك بقطع ناقص بؤرته مركز الارض ، والارض تتحرك بقطع ناقص بؤرته مركز القمر .

٧ ـ ٥) التصادم Collisions

كلما تصادم جسمان ، تكون القوة التي يؤثر كل منهما على الآخر خلال التلامس قوة داخلية ، اذا فرض ان الجسمين يكونان منظومة واحدة . فالزخم الكلي اذن لايتغير ، اى يمكننا كتابة

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \qquad (٧-٢٨)$$

او ما يكافئها

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \qquad (٧-٢٩)$$

حيث تشير الرموز السفلية (1 و 2) الى الجسمين وعلامة الفتحة الى ~~الحركة~~ (الزخوم) والسرع بعد التصادم على التتالي . والمعادلات السابقة عامة وهي تطبق على اى جسمين بغض النظر عن اشكالها ، صلادتها ، وهلم جرا .

اما بالنسبة الى معادلة توازن الطاقة ، فيمكننا كتابة

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} + Q \qquad (٧-٣٠)$$

او

$$\tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2'^2 + Q \qquad (٧-٣١)$$

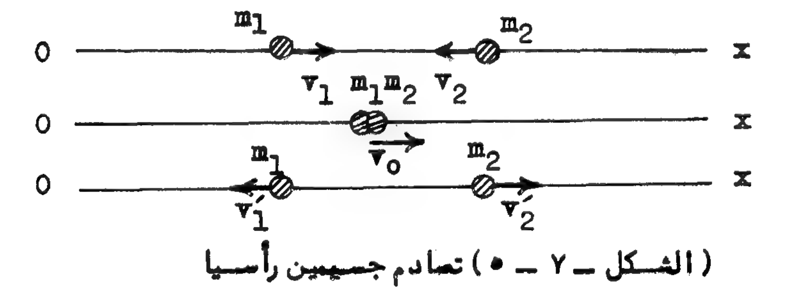
وقد ادخلت هنا الكمية Q لتشير الى مقدار الزيادة ، او النقصان ، في الطاقة التي تحدث نتيجة التصادم .

في حالة التصادم التام المرونة لايحدث تغيير في الطاقة الحركية الكلية اى Q =0 . واذا كانت هناك خسارة في الطاقة عندئذ تكون Q موجبة ويسمى هذا النوع من التصادم بالماص للطاقة endoergic . وقد يحدث ان يكون هناك اكتساب في الطاقة . فمثلا عند انفجار احد الجسمين في نقطة التماس . في هذه الحالة تكون Q سالبة ويسمى التصادم بالباعث للطاقة exoergic .

ان دراسة التصادم له اهمية خاصة في الفيزياء الذريه والنوويه . قد تكون هذه الاجسام ذرات ، نويات ، او اى جسيم اولي ، مثل الالكترونات ، البروتونات ، وهلم جرا .

التصادمات المباشرة Direct Collisions

لنفرض الحالة الخاصة التي يكون فيها تصادم جسمين او جسيمين رأسيا والتي تحدث فيها الحركة كليا على خط مستقيم واحد كما هو مبين في الشكل (٧ ـ ٥) .



(الشكل ـ ٧ ـ ٥) تصادم جسيمين رأسيا

في هذه الحالة يمكن كتابة معادلة توازن الزخم ، معادلة (٧ ـ ٢٩) ، بدون استخدام رموز المتجهات كما يلي :

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \qquad (٧ ـ ٣٢)$$

واشارات السرع (v's) تعين الاتجاه على طول خط الحركة . ولاجل حساب قيم السرع بعد التصادم ، اذا كانت قيمها قبل التصادم معلومة ، يمكننا استخدام

معادلة الزخم المذكورة اعلاه مع معادلة توازن الطاقة ، المعادلة (٧ ـ ٣١) ، اذا كنا نعرف قيمـــة Q . وفي اغلب الاحيان يكون من الملائم لهذا النوع من المسائل ادخال برمتـــر آخر ϵ يسمى بمعامل الارتداد coefficient of restitution وتعرف هذه الكمية بالنسبة بين انطلاق الابتعاد v' الى انطلاق الاقتراب v . وفي رموزنـــا يمكن كتابـــة ϵ على النحو التالي

$$\epsilon = \frac{|v_2' - v_1'|}{|v_2 - v_1|} = \frac{v'}{v} \qquad (٧ ـ ٣٣)$$

وتعتمد القيمة العددية لمعامل الارتداد بصورة رئيسية على التركيب والتكوين الفيزيائـــي للجسمين . ويمكن التحقق بسهولة من ان التصادم التام المرونة تكون فيـــه قيمة $\epsilon = 1$ ، ويتم ذلك بالتعويض عن $Q = 0$ في المعادلة (٧ـ ٣١) ، وحلها مع المعادلـــــة (٧ ـ ٣٢) للحصول على السرع النهائية .

وفي حالة التصادم غير التام المرونة يلتصق الجسمان معا بعد ان يتصادما ، بحيث تكون $\epsilon = 0$. ولمعظم الاجسام الحقيقية تقع قيمة ϵ بين اقصى الحدين صـــــفر وواحد . فقيمتها لكرات البليارد العاجية تكون حوالي ٩٥ ر٠ . وقد تعتمد قيمـــــة معامل الارتداد ايضا على انطلاق الاقتراب . ويكون هذا واضحا بصورة خاصة في حالـــة مركبات السلكون التي تعرف في الصناعـــة بأسم المعجون المخيف " silly putty " فالكرة المصنوعـــة من هذه المادة ترتد بسرعة عالية عندما تضرب سطحا صلبا ولكنهـــــا تتصرف كمعجون عادي في السرع الواطئـة .

ويمكننا حساب قيم السرع النهائية من المعادلة (٧ ـ ٣٢) ومن تعريف معامـــــل الارتداد ، المعادلة (٧ ـ٣٣) فالنتيجة تكون ـ

$$\acute{1} = \frac{(m_1 - \epsilon m_2)v_1 + (m_2 + \epsilon m_2)v_2}{m_1 + m_2} \qquad (٧ ـ ٣٤)$$

$$v_2' = \frac{(m_1 + \epsilon m_1)v_1 + (m_2 - \epsilon m_1)v_2}{m_1 + m_2} \qquad (٧ - ٣٤)$$

وعند اعتبار حالة التصادم غير المرن ، وذلك بالتعويض عن $\epsilon = 0$ ، نجد ان $v_1' = v_2'$ اى لايوجد ارتداد . وبالعكس ، في الحالة الخاصة التي تكون فيهما كتلتا الجسمين متساويتين ، اى $m_1 = m_2$ ، وهي تامة المرونة ، $\epsilon = 1$ ، عندئذ نحصل على —

$$v_1' = v_2$$
$$v_2' = v_1$$

فالجسمان ، اذن ، يتبادلان سرعتيهما فقط بسبب التصادم .

وفي الحالة العامة اى التصادم المباشر غير التام المرونة ، يمكن بسهولة التحقق من أن الخسارة في الطاقة Q ترتبط بواسطة معامل الارتداد بالمعادلة التالية

$$Q = \tfrac{1}{2} \mu v^2 (1 - \epsilon^2)$$

حيث $\mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}$ هي الكتلة المصغرة ، و $v = |v_2 - v_1|$ هي الانطلاق النسبي قبل التصادم . والاشتقاق ترك كتمرين .

٧ — ٦) التصادم المائل والتشتت . مقارنة بين المحاور المختبرية ومحاور مركز الكتلة

Oblique Collisions and Scattering. Comparison of Laboratory and Center-of-mass Coordinates

نلفت انتباهنا الآن الى الحالة الاكثر عموميةً وهي الحركة غير المقيدة بخط مستقيم . حيث يجب استخدام معادلات الزخم بصيغة جبر المتجهات ، اى المعادلات (٧ — ٢٨) و (٧ — ٢٩) ، ولندرس الحالة الخاصة لجسيم كتلته m_1 وسرعته الابتدائية $\vec{v}_1$ (الجسيم الساقط) الذى يضرب جسيما آخر كتلته m_2 وابتدائيا في حالة السكون (جسيم الهدف) . هذه هي مسألة نموذجية تتواجد في الفيزياء النووية . فمعادلات

الزخم لهذه الحالة تكون على النحو التالي

$$\vec{P}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \qquad (٧ـ ٣٥)$$

$$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \qquad (٧ ـ ٣٦)$$

وشرط توازن الطاقة هو

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} + Q \qquad (٧ـ ٣٧)$$

او

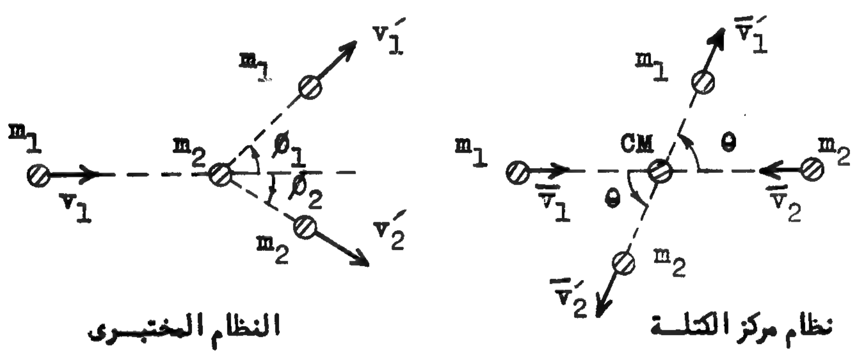
$$\tfrac{1}{2}m_1v_1^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2'^2 + Q \qquad (٧ـ ٣٨)$$

حيث تشير الفتحات هنا ، كالسابق ، الى السرع والزخوم بعد التصادم ، وتمثل Q محصلة الطاقة المفقودة او المكتسبة بسبب التصادم. ان Q هي من الكميات الاساسية والمهمة في الفيزياء الذرية والنووية ، لانها تمثل الطاقة المتحررة او الممتصة في التصادمات الذرية والنووية. في حالات كثيرة . يتحطم جسيم الهدف او يتغير عند التصادم. في حالات كهذه ، تختلف الجسيمات التي تترك التصادم عن الجسيمات التي تدخله. وتحسب هذه بسهولة وذلك بتعيين كتل مختلفة للجسيمات التي تترك التصادم مثل m_3 و m_4 . وعلى اية حال ، يبقى قانون حفظ الزخم الخطي دائما ساري المفعول. ولكن وفقا للنظرية النسبية ، تتغير كتلة الجسيم مع الانطلاق بصورة واضحة والتي سوف ندرسها في الفصل الاخير. في هذا الموضع ، يمكننا القول ان قانون حفظ الزخم ، المبين في المعادلة (٧ ـ ٢٨) يصح في النظرية النسبية اذا فرضت الكتلة كدالة للانطلاق .

محاور مركـز الكتلـــة Center-of-mass Coordinates

تجرى الحسابات النظرية في الفيزياء النوويـــة غالبا بدلالة كميات منسوبة الى محاور يكون فيها مركز كتلـة الجسيمات المتصادمة ساكنا • وبعكس ذلك، تجرى الملاحظـــات التجريبية على تشتت الجسيمات بدلالة المحاور المختبرية • فمن المهم اذن ، بحـــث باختصار مسألة التحول من أحد النظامين الى الآخر •

يوضح الشكل (٧ ــ ٦) مخطط لمتجهات السرعة في النظام المختبرى ونظام مركـــز الكتلـة • حيث تمثل ϕ_1 زاويـــة انحراف الجسيم الساقط بعد ان يصطدم بجســـيم الهدف و ϕ_2 تمثل الزاوية التي يصنعها خط حركة جسيم الهدف مع خط حركة الجسيم الساقط• كلتا الزاويتين ϕ_1 و ϕ_2 مقاسة بالنظام المختبرى • ولما كان مركز الكتلـة في نظام مركز الكتلة ، يجب ان يقع دائما على الخط الواصل بين الجسيمين، فانهمـــا يقتربان من مركز الكتلة فيتصادمان ثم يبتعدان عنـه باتجاهين متضادين •



الشـكل (٧ ــ ٦)

مقارنة بين المحاور المختبرية ومركز الكتلـة

وتمثل θ زاوية انحراف الجسيم الســاقط فــي نظـــام مركـــز الكتلـــــه •

من تعريف مركز الكتلة ، يكون الزخم الخطي في نظام مركز الكتلة صفرا قبـــل التصادم وبعده• اذن يمكننا كتابة

$$\overline{\vec{p}}_1 + \overline{\vec{p}}_2 = 0 \qquad (٧ ــ ٣٩)$$

$$\overline{\vec{p}}_1' + \overline{\vec{p}}_2' = 0 \qquad (٧ـ٤٠)$$

وقد استعملت الخطوط هنا لتبين ان الكمية في السؤال منسوبة الى نظام مركز الكتلـة ·
ومعادلة توازن الطاقة هي

$$\frac{\overline{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\overline{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\overline{p}_1'^2}{2m_1} + \frac{\overline{p}_2'^2}{2m_2} + Q \qquad (٧ـ٤١)$$

ويمكننا الآن حذف $\overline{p}_2$ و $\overline{p}_2'$ من معادلة الطاقة وذلك باستخدام علاقات الزخم ·
والنتيجة بدلالة الكتلـة المصغرة هي

$$\frac{\overline{p}_1^2}{2\mu} = \frac{\overline{p}_1'^2}{2\mu} + Q \qquad (٧ـ٤٢)$$

وتكتب علاقات الزخم ، المعادلات (٧ـ ٣٩) و (٧ـ٤٠) بدلالة السرع على النحـــو
التالي

$$m_1\overline{\vec{v}}_1 + m_2\overline{\vec{v}}_2 = 0 \qquad (٧ـ٤٣)$$

$$m_1\overline{\vec{v}}_1' + m_2\overline{\vec{v}}_2' = 0 \qquad (٧ـ٤٤)$$

وسرعة مركز الكتلة هي

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \qquad (٧ـ٤٥)$$

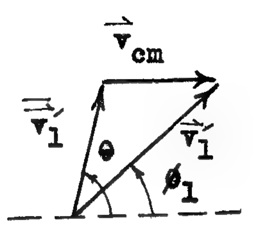
اذن

$$\overline{\vec{v}}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{cm} = \frac{m_2\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \qquad (٧ـ٤٦)$$

وقد وضحت العلاقة بين متجهات السرع $\vec{v}_1'$, $\overline{\vec{v}}_1'$, $\vec{v}_{cm}$ في الشــكل (٧ ـ ٧)
ومن الشكل نرى ان ـ

$$v_1' \sin \phi_1 = \overline{v}_1' \sin \theta \qquad (٧ـ٤٧)$$

$$v_1' \cos \phi_1 = \overline{v}_1' \cos \theta + v_{cm}$$ (٧ـ ٤٨)



الشكل (٧ـ ٧) : العلاقة بين متجهات السرع في النظام المختبرى ونظـام مركـز الكتلـــة

وبقسمة المعادلتين نجد ان العلاقة التي تربط زوايا التشتت تكون على النحو التالـــي

$$\tan \phi_1 = \frac{\sin \theta}{\gamma + \cos \theta}$$ (٧ـ ٤٩)

حيث γ تمثل البرمتر العددى وقيمتـه تعطى بالعلاقة التاليـة

$$\gamma = \frac{v_{cm}}{\overline{v}_1'} = \frac{m_1 v_1}{\overline{v}_1' (m_1 + m_2)}$$ (٧ـ ٥٠)

والخطوة الاخيرة نتجت من استعمال المعادلـــــــــــــــــــــــة (٧ـ ٤٥) ٠

والآن يمكننا حساب قيمـة $\overline{v}_1'$ بسهولة بدلالة الطاقة الابتدائيـة للجســـــيم الساقط من معادلة الطاقـة ، اى المعادلة (٧ـ ٤٢) ٠ وهذه تعطينا المعلومـــات الضروريـة لايجاد γ وهكذا نستنتج العلاقة بين زوايا التشتت ٠ فمثلا ، في حالــة التصادم التام المرونـة ، $Q = 0$ ، نجد من معادلة الطاقـة ان $\overline{p}_1 = \overline{p}_1'$ ، أو $\overline{v}_1 = \overline{v}_1'$ ٠ وهذه النتيجـة مع المعادلة (٧ ـ ٤٦) ، تعطيان القيمـــــــة

$$\gamma = \frac{m_1}{m_2}$$ (٧ـ ٥١)

للتصادم المـرن ٠

ولنفرض حالتين خاصتين لمثل هذه التصادمات المرنة لاهميتها التعليمية ٠

الاولى ، اذا كانت كتلة جسيم الهدف m_2 اكبر بكثير من كتلة الجسيم الساقط m_1 عندئذ تكون γ صغيرة جدا ٠ اذن $\tan \phi_1 \approx \tan \theta$ أو $\phi_1 \approx \theta$ ٠

اى ان ، زوايا التشتت كما ترى في النظامين المختبرى ومركز الكتلة تكون متساوية تقريبا ٠

الحالة الخاصة الثانية هي ان تتساوى كتلة الجسيم الساقط مع كتلة الجسيم الهدف ، اى $m_1 = m_2$ ٠ وفي هذه الحالة تكون $\gamma = 1$ ، وتصبح علاقة التشتت الى مايلي

$$\tan \phi_1 = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \tan \frac{\theta}{2}$$

$$\phi_1 = \frac{\theta}{2}$$

اى ان ، زاوية الانحراف في النظام المختبرى تساوى تماما نصف زاوية الانحراف في نظام مركز الكتلة ٠ ولما كانت زاوية انحراف جسيم الهدف تساوى $\pi - \theta$ في نظام مركز الكتلة ، كما هو مبين في الشكل (٧ ــ ٦) ، عندئذ ، نفس الزاوية في النظام المختبرى تساوى $\frac{\pi - \theta}{2}$ ٠ اذن ، يترك الجسيمان نقطة التصادم بحيث يكون اتجاه كل منهما عموديا على الآخر عندما ينظر اليهما في النظام المختبرى ٠

وللحالة العامة للتصادمات غير تامة المرونة فقد تركت كتمرين للبرهنة على ان γ تعطى بالعلاقة التالية

$$\gamma = \frac{m_1}{m_2} \left[1 - \frac{Q}{T}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (٧ ــ ٥٢)$$

حيث T تمثل الطاقة الحركية للجسيم الساقط المقاسة بالنظام المختبرى ٠

٧ ــ ٧) الدفع ــ Impulse

القوى التي يستغرق تأثيرها فترة قصيرة جدا ، مثل تلك التي تؤثر بها الاجسام

عند التصادم ، تسمى بالقوى الدافعة impulsive forces اذا حصرنا انتباهنا الى جسم واحد او جسيم فنعلم ان معادلة الحركة التفاضلية هي

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$$ (٧ـ ٥٣)

او بصيغة التفاضل

$$d(m\vec{v}) = \vec{F}dt$$ (٧ـ ٥٤)

ولنكامل بالنسبة للزمن في الفترة بين $t = t_1$ الى و $t = t_2$ ، وهذا هو الزمن الذى تؤثر فيه القوة ، عندئذ نحصل على

$$\Delta(m\vec{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt$$ (٧ـ ٥٥)

ويسمى تكامل الزمن للقوة بالدفع ويمثل بالرمز $\hat{\vec{p}}$ ، ووفقا لذلك تصبح المعادلة السابقة

$$\Delta(m\vec{v}) = \hat{\vec{p}}$$ (٧ـ ٥٦)

اى ان التغير في الزخم الخطي لجسم تحت تأثير قوة دافعة يساوى دفع القوة ·

ويمكننا اعتبار الدفع المثالي هو الذى ينتج من قوة لانهائية في الكبر ولكنها تنتهي في فترة زمنية تقرب من الصفر بحيث يبقى التكامل $\int \vec{F}dt$ ثابتا ، ودفع مثالي كهذا سيحدث تغيرا آنيا في الزخم وفي سرعة الجسم بدون ان ينتج عنه اية ازاحة ·

العلاقة بين الدفع ومعامل الارتداد

لنطبق مفهوم الدفع على حالة التصادم المباشر بين جسمين كرويين (بحث في البند ٧ـ٥) ، وسوف نقسم الدفع الى قسمين ، الدفع الضاغط $\hat{\vec{p}}_c$ ، ودفع الارتداد $\hat{\vec{p}}_r$ ، وسنركز اهتمامنا فقط على المركبات التي تقع على طول الخط الواصل بين المركزين ، فللتضاغط اذن ، يمكننا كتابة

$$m_1v_o - m_1v_1 = \hat{P}_c \qquad (٧-٥٧)$$

$$m_2v_o - m_2v_2 = -\hat{P}_c \qquad (٧-٥٨)$$

حيث v_o تمثل السرعة المشتركة للجسيمين في اللحظة التي يكون فيها انطلاقهمـــا النسبي صفرا ٠ وبالتماثل ، للارتداد ، نحصل على

$$m_1v_1' - m_1v_o = \hat{P}_r \qquad (٧-٥٩)$$

$$m_2v_2' - m_2v_o = -\hat{P}_r \qquad (٧-٦٠)$$

وبحذف v_o من المعادلتين (٧-٥٧) و(٧-٥٨) وكذلك من المعادلتيـــن (٧-٥٩) و (٧-٦٠) ، نحصل على المعادلتين التاليتين

$$m_1m_2\ (v_2 - v_1) = \hat{P}_c(m_1 + m_2)$$

$$m_1m_2\ (v_1' - v_2') = \hat{P}_r(m_1 + m_2)$$

وبقسمة المعادلة الثانية على الاولى نحصل على العلاقة التاليـة

$$\frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} = \frac{\hat{P}_r}{\hat{P}_c} \qquad (٧-٦١)$$

ولكن الطرف الايسر هو تعريف معامل الارتداد ϵ ٠ اذن

$$\epsilon = \frac{\hat{P}_r}{\hat{P}_c} \qquad (٧-٦٢)$$

اذن ، معامل الارتداد يساوى النسبة بين دفع الارتداد والدفع الضاغط ٠

٧ ــ ٨) حركة جسم متغير الكتلــة • حركــة الصاروخ

Motion of a Body with Variable Mass. Rocket Motion.

علينا ان نكون حذرين عند وضع المعادلات التفاضلية للحركة لحالة جسـم تتغيــر كتلتـــــه مع الزمن • ان مفهوم الدفع قد يكون مفيدا لهذا النوع من المســـائـل •

خذ الحالة العامة لحركة جسـم تتغير كتلتـه • وافرض ان $\vec{F}_{ext}$ تمثل القــوة الخارجية التي تؤثر على الجســم في زمن معين و Δm تمثل الزيادة في كتلـــــة الجســم التي تحدث في فترة زمنية قصيرة Δt • عندئذ تمثل $\vec{F}_{ext}\,\Delta t$ الدفــع المتولد عن القــوة الخارجية ويكون لدينا ــ

$$\vec{F}_{ext}\,\Delta t = (\vec{P}_{total})_{t+\Delta t} - (\vec{P}_{total})_{t}$$

للتغيير في الزخم الخطي لكلي للمنظومــة • فاذا كانت $\vec{v}$ تمثل ســرعــة الجســم و $\vec{V}$ سرعة الزيادة في الكتلـــة Δm بالنسبة للجسم • عندئذ يمكننا كتابـــة ــ

$$\vec{F}_{ext}\,\Delta t = (m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) - \left[m\vec{v} + \Delta m(\vec{v} + \vec{V})\right]$$

وهذه تبسيط الى

$$\vec{F}_{ext}\,\Delta t = m\,\Delta\vec{v} + \Delta m\,\Delta\vec{v} - \vec{V}\,\Delta m$$

وبقسمة كل حد على Δt نحصل على ــ

$$\vec{F}_{ext} = (m + \Delta m)\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} - \vec{V}\frac{\Delta m}{\Delta t}$$

اذن عندما تقتــرب Δt من الصفر في الغاية نحصل على المعادلة العامة التاليـــة

$$\vec{F}_{ext} = m\dot{\vec{v}} - \vec{V}\dot{m} \qquad (٧ ــ ٦٣)$$

وقد تمثل القوة $\vec{F}_{ext}$ هنا جاذبية الارض او مقاومــة الهواء والخ • وفي حالـــــة الصواريخ يمثل الحد $\vec{V}\dot{m}$ الدفع المضاد " Thrust "

ولنطبق المعادلة على حالتين خاصتين • اولا • افرض ان جســما يتحرك في ضباب او سديم بحيث تزداد كتلتــه عند مروره • في هذه الحالة تكون السرعة الابتدائيـــــة

لتراكم المادة صفرا · اذن $\vec{V} = -\vec{v}$ ونحصل على

$$\vec{F}_{ext} = m\dot{\vec{v}} + \vec{v}\dot{m} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \qquad (٧_٦٤)$$

لمعادلة الحركة · وتستخدم هذه فقط عندما تكون السرعة الابتدائية للمادة التراكمية تساوي صفرا · وما عدا ذلك يجب استخدام المعادلة العامة (٧ــ ٦٣) ·

خذ حركة الصاروخ للحالة الثانية · في هذا المثال تكون اشارة $\dot{m}$ سالبة ، لان الصاروخ يخسر كتله على شكل وقود مقذوف عندئذ يتجه $\vec{V}\dot{m}$ بعكس اتجاه السرعة النسبية للوقود المقذوف $\vec{V}$ · وللتبسيط سوف نحل معادلة الحركة للحالة التي تكون فيها القوة الخارجية $\vec{F}_{ext}$ صفرا · عندئذ نحصل على

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{V}\dot{m} \qquad (٧_٦٥)$$

ويمكننا فرز المتغيرات والتكامل لايجاد $\vec{v}$ كما يلي ــ

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{V}\frac{dm}{m\ dt}$$

$$\int d\vec{v} = \int \frac{\vec{V}\ dm}{m}$$

فاذا فرضت $\vec{V}$ ثابتة ، عندئذ يمكننا التكامل بين الغايتين لايجاد الانطلاق كدالة للكتلة m ·

$$\int_{v_0}^{v} dv = -V\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}$$

$$v = v_0 + V\ln\frac{m_0}{m}$$

حيث m_0 تمثل الكتلة الابتدائية للصاروخ زائدا الوقود غير المحترق ، m الكتلة في اى زمن و V انطلاق الوقود المقذوف بالنسبة الى الصاروخ · وبسبب طبيعة الدالة اللوغارتيمية ، من الضروري استعمال كمية كبيرة من الوقود الى نسبة وزن الصاروخ فارغ (بدون وقود) لاجل الحصول على انطلاقات عالية لضرورتها في منصة انطلاق القمر الصناعي ·

تمارين

٧ ـ ١) • منظومة متكونة من ثلاث جسيمات ، كتلة كل منها واحد • فاذا كانت مواضعها وسرعها كالاتي

$$\vec{r}_1 = \hat{i} + \hat{j} \qquad \vec{v}_1 = 2\hat{i}$$

$$\vec{r}_2 = \hat{j} + \hat{k} \qquad \vec{v}_2 = \hat{j}$$

$$\vec{r}_3 = \hat{k} \qquad \vec{v}_3 = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

جد موضع وسرعة مركز الكتلة • جد كذلك الزخم الخطي للمنظومة •

٧ ـ ٢) (آ) جد الطاقة الحركية للمنظومة السابقة • (ب) جد الزخم الزاوي حول المركز •

٧ ـ ٣) • بندقية كتلتها M تطلق قذيفة كتلتها m ، فاذا كانت سرعة الفوهة (سرعة القذيفة بالنسبة الى البندقية) هي v_0 ، ماهو الانطلاق الفعلي للقذيفة مباشرة بعد ان تترك ماسورة البندقية ؟ •

٧ ـ ٤) • اطلقت قذيفة كتلتها m وانطلاقها v_0 مباشرة نحو قالب خشبي كتلته M موضوع على طاولة افقية خشنة • فاذا كانت μ تمثل معامل الاحتكاك الانزلاقي بين القالب والطاولة ، فما هي المسافة التي ينزلقها القالب قبل أن يصل الى حالة السكون ؟ •

٧ ـ ٥) • قذفت شظية بزاوية ٤٥ وبانطلاق ابتدائي v_0 ، وفي اعلى نقطة من المسار انفجرت الشظية الى قسمين متساويين ، احدهما تحرك مباشرة نحو الاسفل بالنسبة الى الارض وبانطلاق ابتدائي $2v_0$ • ماهو اتجاه وانطلاق القسم الاخر مباشرة بعد الانفجار ؟ •

٧ــ ٦) •ثلاثة جسيمات متساوية الكتلــة تتحرك على خط مستقيم • في البدايــة كانـــت مواضع الجسيمات في النقاط ــ ١، صفر، +١ ، وسرعها v_0, $2v_0$, $4v_0$ على التتالي • جد السرع النهائية للجسيمات على فرض ان التصادم كـان تــام المرونــة •

٧ــ٧) •سقطت كرة من ارتفاع h على رصيف افقي • فاذا كانت $\in$ تمثل معامل الارتداد اثبت ان المسافة العمودية الكلية التي تقطعها الكرة قبل ان يتوقف ، ارتــداد الكرة هي ــ

$h(1 + \in^2)/(1 - \in^2)$.

٧ــ ٨)• في السؤال السابق جد الزمن الكلي الذى ترتد فيــه الكــرة •

٧ــ٩)•اشتق المعادلات (٧ــ ٣٤) •

٧ــ١٠)•افرض ان الارض والقمر يمثلان منظومة معزولة اثبت ان كلا منهما يتحرك بقطـــع ناقص حول مركز كتلتيهما المشترك •

٧ــ١١) • اثبت ان الطاقة الحركية لمنظومة متكونــة من جســمين هي

$\frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu v^2$

حيث $m=m_1 + m_2$, v الانطلاق النسبي و μ الكتلــة المصغـــــــرة •

٧ــ١٢)• اثبت ان الثابت c في المعادلة (٦ــ ٥٨) لزمن دورة كوكب حول الشمـــس يجب ان يكون $2\pi\left[G(M+m)\right]^{-\frac{1}{2}}$ بدلا من $2\pi(GM)^{-\frac{1}{2}}$ حيث M تمثـل كتلــة الشمس و m كتلــة الكوكب •

٧ــ١٣)• اذا حدث تصادم مباشر بين جســمين اثبت ان الخسارة في الطاقــة الحركيــة تساوى

$\frac{1}{2}\mu v^2(1 - \in^2)$

حيث μ تمثل الكتلة المصغرة ، v الانطلاق النسبي قبل التصادم و $\in$ هي معامل الارتداد .

٧ـ١٤) . جسيم متحرك كتلته m_1 اصطدم اصطداما مرنا بجسيم هدف كتلته m_2 وكان ابتدائيا في حالة السكون . فاذا كان التصادم رأسيا اثبت ان الجسيم الساقط يفقد $4\mu / m$ من طاقته الحركية الاصلية ، حيث μ هي الكتلة المصغرة و $m = m_1 + m_2$.

٧ـ١٥) . اثبت ان الزخم الزاوى لمنظومة متكونة من جسيمين هو

$$\vec{r}_{cm} \times m\vec{v}_{cm} + \vec{R} \times \mu\vec{v}$$

حيث $m = m_1 + m_2$ ، μ هي الكتلة المصغرة ، $\vec{R}$ متجه الموضع النسبي و $\vec{v}$ هي السرعة النسبية للجسيمين .

٧ـ١٦) . بروتون كتلته m_p وسرعته الابتدائية $\vec{v}$ يصطدم بذرة هليوم ، كتلتها $4m_p$ ابتدائيا في حالة السكون . اذا كان البروتون يترك نقطة الاصطدام بزاوية ٤٥ مع خط الحركة الاصلي . جد السرعة النهائية لكل جسيم . افرض ان التصادم تام المرونة .

٧ـ١٧) . حل السؤال السابق للحالة التي يكون فيها التصادم غير مرن و Q تساوى $\frac{1}{4}$ طاقة البروتون الابتدائية .

٧ـ١٨) . بالرجوع الى السؤال (٧ـ ١٦) ، جد زاوية التشتت Scattering للبروتون في مركز كتلة المنظومة .

٧ـ١٩) . جد زاوية تشتت البروتون في مركز كتلة المنظومة في السؤال (٧ـ١٧) .

٧ـ٢٠) • جسيم كتلتــه m وزخمــه الابتدائي p_1 اصطدم بجسيم لــه نفس الكتلــة وكان في حالة السكون • فاذا كان مقدار الزخم النهائي للجسيمين هــــــو p_1' ، p_2' على التتالي • اثبت ان مقدار الخسارة في الطاقــة للتصـــادم هــــو

$$Q = \frac{p_1' p_2'}{2m} \cos \psi$$

حيث ψ هي الزاوية بين مسارى الجسيمين بعد التصادم •

٧ـ٢١) اشتق المعادلــة (٧ــ ٥٢) •

٧ـ٢٢) اطلق صاروخ عموديا الى الاعلى • اذا فرضت g ثابتة ، جد معادلة الحركة • ماهي نسبة الوقود الى وزن الصاروخ بدون وقود للحصول على انطلاق نهائــي يساوى انطلاق انفلات الارض(٧ ميل بالثانية) اذا كان انطلاق الغاز المستنفذ (آ) $\frac{١}{٢}$ ميل في الثانية • و (ب) ٢ ميل في الثانية ؟ افرض ان معــدل الخسارة في الوقود في الثانية ثابتا ويساوى ١ ٪ من الكتلة الابتدائية للوقود •

٧ـ٢٣) • سلسلة منتظمة ثقيلة طولها a علقت ابتدائيا بحيث كان جزءا من طولهـــــا مقداره b يتدلى من حافة الطاولة • والجزء الباقي والذى طولــــه $a - b$ ملفوف بالقرب من الحافة • فاذا تركت السلسلة تتحرك ، اثبت ان انطلاقها عنــد آخر حلقة تترك نهاية الطاولة هو $\left[2g(a^3 - b^3)/3a^2\right]^{\frac{1}{2}}$

٧ـ٢٤) • جد المعادلة التفاضلية لحركة قطرة مطر تسقط خلال الضباب فتزداد كتلتهـــا اثناء سقوطها • افرض انها تبقى كرويــة الشكل وان معدل التراكم يتناسب مـــع المقطع العرضي للقطرة مضروبا في انطلاق السقوط • اثبت ان القطــرة تبــدأ مــن الســكون عندمــا تكــون ابتدائيــا صغيــرة جــدا عندئــذ يكـــــون التعجيــل ثابتــا ويســاوى $g/7$ •

الفصـــل الثامـــن

ميكانيك الاجسام الصلده ـ الحركة في مستو

Mechanics of Rigid Bodies Motion in a Plane

قد يعتبر الجسم الصلد يتكون من منظومة جسيمات مواضعها النسبية ثابتــة ، او بعبارة اخرى ، المسافة بين اى جسيمين ثابتة ، هناك مثالية في هذا التعريـــف للجسم الصلد ، لانــه اولا ، كما اشرنا في تعريف الجسيم ، لاتوجد في الطبيعـــة جسيمات حقيقيــة - وثانيا لاتكون الاجسام الممتدة الحقيقية تامة الصلاده ، اذ يتغيـــر شكلها (تمتط ، تنضغط او تلتوى) بمقدار قد يزداد او ينقص عند تسليط قــوة خارجية عليها ، على اية حال ، سوف نهمل في الوقت الحاضر مثل هذه التغيرات .

٨ ـ ١) مركز الكتلـة لجسـم صلد Center of Mass of a Rigid Body

سبق ان عرفنا مركز الكتلـة (البند ٧ ـ ١) لمنظومـة جسيمات الممثل بالنقطـــة (x_{cm} ، y_{cm} ، z_{cm}) وهي كما يلي

$$x_{cm} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} \quad \text{و} \quad y_{cm} = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i} \quad \text{و} \quad z_{cm} = \frac{\sum z_i m_i}{\sum m_i}$$

ولجسم ممتد صلـد ، يمكننا استبدال عملية الجمع بالتكامل على حجم الجســـم ، اى

$$x_{cm} = \frac{\int_v \rho x \, dv}{\int_v \rho \, dv} \quad \text{و} \quad y_{cm} = \frac{\int_v \rho y \, dv}{\int_v \rho \, dv} \quad \text{و} \quad z_{cm} = \frac{\int_v \rho z \, dv}{\int_v \rho \, dv} \qquad (٨ـ١)$$

حيث ρ تمثل الكثافـة و dv عنصر الحجم .

اذا كان الجسم الصلد قشرة رقيقـة الشـــكل فمعادلات مركـز الكتلـة تصبح ـ

$$x_{cm} = \frac{\int_s \rho x \, ds}{\int_s \rho \, ds} \quad \text{و} \quad y_{cm} = \frac{\int_s \rho y \, ds}{\int_s \rho \, ds} \quad \text{و} \quad z_{cm} = \frac{\int_s \rho z \, ds}{\int_s \rho \, ds} \qquad (٨ـ٢)$$

حيث ds يمثل عنصر المساحة و ρ كتلــة وحدة المساحة • ويمتد التكامـل علـى مساحة الجسـم •

بالتماثل ، اذا كان الجسم على شكل سلك رفيع ، فيكـون عندنـا

$$x_{cm} = \frac{\int_\ell \rho x \, d\ell}{\int_\ell \rho \, d\ell}, \quad y_{cm} = \frac{\int_\ell \rho y \, d\ell}{\int_\ell \rho \, d\ell}, \quad z_{cm} = \frac{\int_\ell \rho z \, d\ell}{\int_\ell \rho \, d\ell} \qquad (٨_٣)$$

في هذه الحالة ، ρ تمثل كتلــة وحدة الطول و $d\ell$ عنصـر الطـــول •

وللاجسام المنتظمة المتجانسة ، تكون عوامل الكثافة ρ ثابتة لجميع الحالات ولذلـك يمكن حذفها من كل المعادلات السابقة •

واذا كان هنالك جسـم مركب اى يتكون من جزيئين او اكثر وكانت مراكز كتل الاجـزاء معروفة فمن الواضح عندئذ انـه يمكن من تعريف مركز الكتلـة كتابة ــ

$$x_{cm} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots\cdots}{m_1 + m_2 + \cdots\cdots\cdot} \qquad (٨_٤)$$

مع معادلات مماثلة لكل من y_{cm} و z_{cm} • اى ان (x_1 ، y_1 ، z_1) يمثـل مركز كتلـة الجزء m_1 ، وهلم جرا •

<u>فرضيات التناظـر</u>

اذا كان هنالك جسـم متناظر، فمن الممكن الاستفادة من هذا التناظـر لتعييـن مركز الكتلـة • اذن ، اذا كان للجسـم مستو للتناظر ، اى ، اذا كان لكـل جسـيم m_i صورة مثل m_i' بالنسبة لمستو ما ، عندئذ يقع مركز الكتلـة في ذلك المسـتوى • ولكي نبرهن هذا ، لنفرض ان المستوى xy يمثل مستوى التناظر • عندئذ يكون عندنا ــ

$$z_{cm} = \frac{\sum (z_i m_i + z_i' m_i')}{\sum (m_i + m_i')}$$

ولكن $m_i = m_i'$ و $z_i = -z_i'$ ، اذن تختزل حدود البسط بازواج ، ولذلك $z_{cm} = 0$ ، وهذا يعني ، ان مركز الكتلة يقع في المستوى ـ xy .

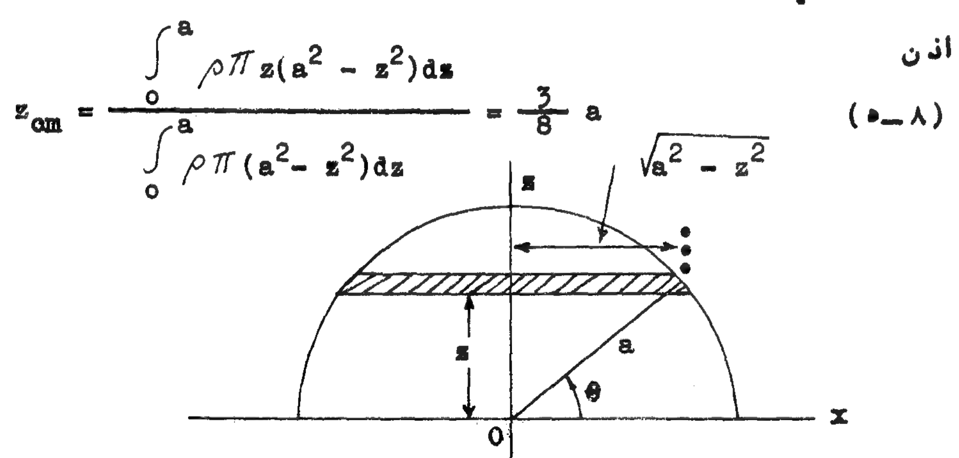
وبالتماثل ، اذا كان للجسم خط للتناظر فمن السهل ان نثبت ان مركز الكتلة يقع على ذلك الخط . وقد ترك البرهان كتمرين .

نصف كرة مثلثة

لايجاد مركز كتلة نصف كرة متجانسة مثلثة نصف قطرها a ، ومن التناظر ، يقع مركز الكتلة على نصف القطر العمودي على سطحها المستوى . وباختيار محاور كما هو مبين في الشكل (٨ ـ ١) ، يكون مركز الكتلة واقعا على المحور ـ z . ولحساب z_{cm} نستعمل عنصر حجوم مدور سمكه dz ونصف قطره $(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ ، كما هو مبين في الشكل . اي ان $dv = \pi\ (a^2 - z^2)\ dz$

اذن

$$z_{cm} = \frac{\int_0^a \rho \pi z(a^2 - z^2)dz}{\int_0^a \rho \pi (a^2 - z^2)dz} = \frac{3}{8}\ a \qquad (٨ ـ ٥)$$



الشكل (٨ ـ ١)

المحاور لحساب مركز كتلة نصف كرة

قشـرة نصف كرويـة

لقشرة نصف كرويـة نصف قطرها a نستخدم نفس المحاور التي استخدمت فـي المسألة السابقة (الشكل (٨ ــ ١) ، مرة اخرى ، من التناظر يقع مركز الكتلـة علـى المحور ــ z . ولنختر للعنصر السطحي حلقـة دائرية عرضها $ad\theta$. اذن يمكـن كتابـة

$$ds = 2\pi\,(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}\,a d\theta$$

ولكـن

$$\theta = \sin^{-1}(z/a),$$

اى ان

$$d\theta = (a^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}}\,dz$$

اذ ن ،

$$ds = 2\pi\,a\,dz$$

ووفقا لذلك يكون موضع مركز الكتلـة كما يلي

$$z_{cm} = \frac{\int_0^a \rho\,2\pi a z\,dz}{\int_0^a \rho\,2\pi a\,dz} = \frac{1}{2}\,a \qquad (٨ ــ ٦)$$

نصف دائرة

لايجاد مركز كتلـة سلك رفيع على شكل نصف دائرة نصف قطرها a ، نستخـد محاور كالمبينة في الشكل (٨ ــ ٢) ، فيكون عندنا

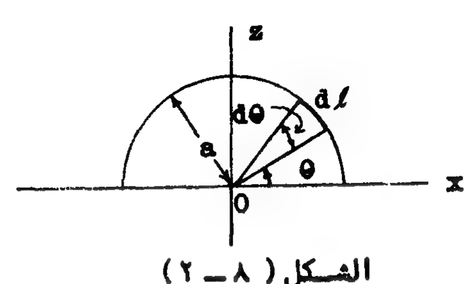
$$d\ell = a\,d\theta$$

و

$$z = a\sin\theta$$

اذ ن

$$z_{cm} = \frac{\int_0^{\pi} \rho\,(a\sin\theta)\,a\,d\theta}{\int_0^{\pi} \rho\,a\,d\theta} = \frac{2}{\pi}\,a \qquad (٨ ــ ٧)$$



الشكل (٨ ــ ٢)

المحاور لحساب مركز كتلة سلك نصف دائرى

صفيحة نصف دائرية

في حالة صفيحة نصف دائرية منتظمة ، يكون مركز الكتلة علــى المحــور ــ z (الشكل ٨ ــ ٢) . وقد ترك ذلك كمسألة للبرهنة على ان ــ

$$z_{cm} = \frac{4}{3\pi} a \qquad (٨ ــ ٨)$$

٨ ــ ٢) التوازن الستاتيكي لجسم صلد

Static Equilibrium of a Rigid Body

رأينا (بند ٧ ــ ١) ان تعجيل مركز كتلــة منظومــة يساوى المجموع الاجمالي للقــوى الخارجية مقسومة على الكتلــة . وبصورة خاصة ، اذا كانت المنظومــة جسمــا صلــدا وكان مجموع جميع القوى الخارجية يساوى صفرا ــ اى

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = 0 \qquad (٨ ــ ٩)$$

عندئذ سيبقى مركز الكتلــة ساكنا ، اذا كان في البداية ساكنا . فالمعادلة (٨ ــ ٩) تعبر اذن عن شرط التوازن الانتقالي للجسم الصلد .

وبالتماثل ، ان تلاشي عزوم جميع القوى المسلطة ، اي

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \ldots = 0 \qquad (٨ ــ ١٠)$$

يعني ان الزخم الزاوى للجسم لايتغير (بند ٧ــ٢) ٠ هذا هو شرط التوازن الدوراني للجسم السلد ، اى اذا كان الجسم في البداية ساكنا ، فانه سوف لايبدأ بالدوران ٠

والمعادلتان (٨ــ٩) و (٨ــ١٠) معا يكونان الشرطين الضروريين لان يكون الجسم الصلد تام التوازن ٠

التوازن في مجال جاذبية منتظم

Equilibrium in a Uniform Gravitational Field

لنفرض ان جسما صلدا في مجال جاذبية منتظم كوجوده على سطح الكرة الارضية ٠

لما كان مجموع قوى الجاذبية يساوى $m\vec{g}$ حيث m هي كتلة الجسم ، فيمكننا كتابة شرط التوازن الانتقالي كما يلي ــ

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + m\vec{g} = 0 \qquad (٨ــ١١)$$

حيث $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ وهلم جرا ، هي جميع القوى الخارجية باستثناء الجاذبية ٠

وبالتماثل ، يمكن كتابة شرط التوازن الدوراني كمايلي ــ

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \ldots + \sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{g} = 0 \qquad (٨ــ١٢)$$

ولكن $\vec{g}$ متجه ثابت ، لذلك يمكننا كتابة ــ

$$\sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{g} = (\sum_i m_i\vec{r}_i)\times\vec{g} = m\vec{r}_{cm} \times \vec{g} = \vec{r}_{cm} \times m\vec{g} \qquad (٨ــ١٣)$$

المعادلة السابقة تنص على ان عزم قوة الجاذبية حول اية نقطة ٠ يساوى عزم قوة منفردة $m\vec{g}$ مؤثرة على مركز الكتلة [1] ٠ فمعادلة التوازن الدوراني عندئذ تصبح

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \ldots + \vec{r}_{cm} \times m\vec{g} = 0 \qquad (٨ــ١٤)$$

---

(١) يسمى مركز قوة التجاذب الظاهرى بمركز الثقل ٠ وفي مجال جاذبية منتظم كالذى فرضناه يتطابق مركز الثقل ومركز الكتلة ٠

التوازن تحت تأثير قوى واقعه في نفس المستوى

Equilibrium under Coplanar Forces

اذا كانت خطوط تأثير منظومة قوى مسلطة على جسم صلد تقع في مستو واحد عندئذ يمكن ان نكتب $\vec{F}_1 = \hat{i}X_1 + \hat{j}Y_1$ وهلم جرا . فصيغ مركبات معادلات التوازن ، اى المعادلات (٨ـ٩) و (٨ـ١٠) ، (التي يتذكرها الطالب من الفيزياء الاولية)، عندئذ تكون

التوازن الانتقالي :

$$X_1 + X_2 + \dots = 0 \quad Y_1 + Y_2 + \dots = 0 \qquad (٨\text{ـ}١٥)$$

التوازن الدوراني

$$x_1Y_1 - y_1X_1 + x_2Y_2 - y_2X_2 + \dots = 0 \qquad (٨\text{ـ}١٦)$$

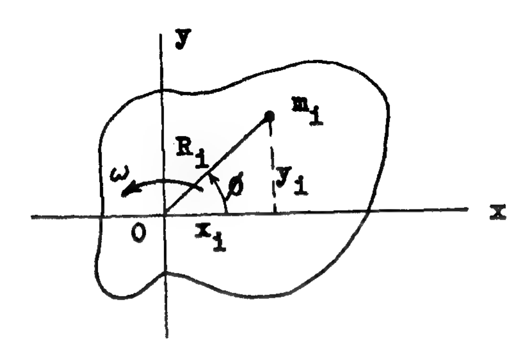
٨ ـ٣) دوران جسم صلد حول محور ثابت ـ عزم القصور الذاتي

Rotation of a Rigid Body about a Fixed Axis. Moment of Inertia.

من ابسط حركات الجسم الصلد ، عدا الحركة الانتقالية الصرفة ، حركته الدورانية المقيدة حول محور ثابت. لنختر المحور ـ z في محاور مناسبة كمحور للدوران. فمسار الجسيم النموذجي m_i الذى موضعه النقطة (x_i ، y_i ، z_i) عندئذ يكون دائرة نصف قطرها $R_i = (x_i^2 + y_i^2)^{\frac{1}{2}}$ ومركزها يقع على المحور ـ z . ويمثل الشكل (٨ـ٣) مقطعا عرضيا للحركة موازيا للمستوى ـ xy .

انطلاق الجسيم i هو

$$v_i = R_i\omega = (x_i^2 + y_i^2)^{\frac{1}{2}}\omega \qquad (٨\text{ـ}١٧)$$



الشكل (٨ـ٣)

مقطع عرضي لجسم صلد يدور حول المحور ـ Z

حيث ω تمثل الانطلاق الزاوى للدوران · من دراسة الشكل ، نرى ان للسرعة المركبات التالية ـ

$$\dot{x}_i = -v_i \sin \phi = -\omega y_i \qquad (١٨ـ٨)$$

$$\dot{y}_i = v_i \cos \phi = \omega x_i \qquad (١٩ـ٨)$$

$$\dot{z}_i = 0 \qquad (٢٠ـ٨)$$

حيث عرفت الزاوية ϕ كما هو مبين في الشكل · ويمكن كذلك الحصول على المعادلات السابقة بايجاد مركبات المعادلة التالية ـ

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \qquad (٢١ـ٨)$$

حيث $\vec{\omega} = \vec{k}\,\omega$

لنحسب الطاقة الحركية لدوران الجسم ، من العلاقة

$$T = \sum_i \tfrac{1}{2}m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2}(\sum_i m_i R_i^2)\,\omega^2 = \tfrac{1}{2}I\,\omega^2 \qquad (٨_٢٢)$$

حيث

$$I = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) \qquad (٨_٢٣)$$

الكمية I التي عرفت في المعادلة السابقة ، لها اهمية خاصة في دراسة حركة الاجسام الصلدة ، وتسمى بعزم القصور الذاتي ،

لنوضح كيفية دخول عزم القصور الذاتي بصورة عميقة في الموضوع ، لنحسب الزخم الزاوى حول محور الدوران ، لما كان الزخم الزاوى لجسيم ، من التعريف ، يساوى $\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i$ فمركبة _ z عندئذ هي

$$m_i(x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i) = m_i(x_i^2 + y_i^2)\,\omega = m_i R_i^2\,\omega \qquad (٨_٢٤)$$

حيث استعملنا المعادلتين (٨ _ ١٨) و (٨ _ ١٩) ، ونحصل على مركبة _ z الكلية للزخم الزاوى ، والتي سنسميها L ، باخذ المجموع لجميع الجسيمات ، اى _

$$L = \sum_i m_i R_i^2\,\omega = I\,\omega \qquad (٨_٢٥)$$

رأينا في البند (٧ _ ٢) ان معدل التغير الزمني للزخم الزاوى لاى منظومة يساوى العزم الكلي للقوى الخارجية ، ولجسم مقيد الدوران حول محور ثابت يكون عندنا _

$$N = \frac{dL}{dt} = \frac{d(I\,\omega)}{dt} \qquad (٨_٢٦)$$

حيث N تمثل العزم الكلي لجميع القوى المسلطة حول محور الدوران (مركبة $\vec{N}$ على طول المحور) ، اذا كان الجسم صلداً ، عندئذ تكون I ثابتة ويمكننا ان نكتب _

$$N = I \frac{d\omega}{dt}$$ (٨ــ٢٧)

والتناظر بين معادلات الحركة الانتقالية والدورانية حول محور ثابت هو كما يلي ـــ

الانتقاليـــــة		الدورانيـــــة	
الزخم الخطي	$P = mv$	الزخم الزاوى	$L = I\omega$
القـــــوة	$F = m\dot{v}$	العـــــزم	$N = I\dot{\omega}$
الطاقة الحركية	$T = \frac{1}{2}mv^2$	الطاقة الحركية	$T = \frac{1}{2}I\omega^2$

فعزم القصور الذاتي يناظر اذن الكتلة ، وهو مقياس للقصور الذاتي الدوراني لجسم نسبة الى محور ثابت للدوران ، تماما كما تكون الكتلة مقياسا للقصور الذاتي الانتقالي لجسم

٨ ــ ٤) حساب عـزم القصور الذاتي ـــ

Calculation of the Moment of Inertia

في الحسابات الفعلية لعـزم القصور الذاتي $\sum mR^2$ للاجسام المتـــعددة ، يمكننا استبدال المجموع بالتكامل على الجسم ، تماماً كما فعلنا في حساب مركز الكتلـة ، اى يمكننا كتابـة ـــ

$$I = \int R^2 \, dm$$ (٨ــ٢٨)

حيث dm تمثل عنصر الكتلة وتساوى حاصل ضرب الكثافة في عنصر مناسب (الحجـم المساحة ، او الطول) . ومن المهم ان تتذكر ان R هي المسافة العموديـة مـن عنصر الكتلـة على محور الدوران .

ومن الواضح ، لحالة الجسم المركب يمكننا ان نكتب من تعريف القصور الذاتي مايلي

$$I = I_1 + I_2 + \ldots$$ (٨ــ٢٩)

حيث I_1 ، I_2 والخ هي عزوم القصور الذاتيه لمختلف الاجزاء حول المحور الخاص الذى تم اختياره ·

لنحسب الآن عزوم القصور الذاتيه لبعض الحالات الخاصة المهمة ·

قضيب دقيق

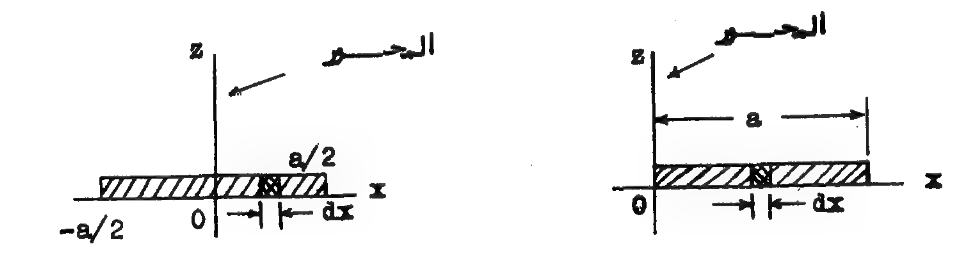
ان عزم القصور الذاتي لقضيب رفيع منتظم طوله a وكتلته m حول محور عمودى على احد طرفيه (الشكل ٨ ـ ٤ (آ)) هو ـ

$$I = \int_0^a x^2 \rho\, dx = \tfrac{1}{3} \rho a^3 = \tfrac{1}{3} ma^2 \qquad (٨ ـ ٣٠)$$

وقد نتجت الخطوة الاخيرة لان $m = \rho a$.

اما اذا كان المحور يمر في مركز القضيب (الشكل ٨ ـ ٤ "ب") فنحصل على

$$I = \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \rho\, dx = \frac{1}{12} \rho a^3 = \frac{1}{12} ma^2 \qquad (٨ ـ ٣١)$$



(ب)   (آ)

الشكل (٨ ـ ٤)

المحاور لحساب عزم القصور الذاتي لقضيب (آ) حول احد طرفيه

(ب) حول المركز

الطوق او القشرة الاسطوانية Hoop or Cylindrical Shell

في حالة الطوق الدائرى الدقيق او القشرة الاسطوانية تقع جميع الجسيمات على نفس البعد من المحور، فعزم القصور الذاتي اذن يكون —

$$I = ma^2 \qquad (٨ـ٣٢)$$

حيث a يمثل نصف القطر و m الكتلة ٠

قرص دائرى او اسطوانة Circular Disc or Cylinder

سنستخدم المحاور القطبية لحساب عزم القصور الذاتي لقرص دائرى منتظم نصف قطره a وكتلته m ٠ وعنصر الكتلة هنا عبارة عن حلقة دقيقة نصف قطرها r وسمكها dr ، وهي تعطى كما يلي —

$$dm = \rho\, 2\pi r\, dr$$

حيث ρ تمثل كتلة وحدة المساحة ٠ فعزم القصور الذاتي حول محور يمر من مركز القرص وعمودى على وجهه المستوى (الشكل ٨ـ ٥) عندئذ يكون —

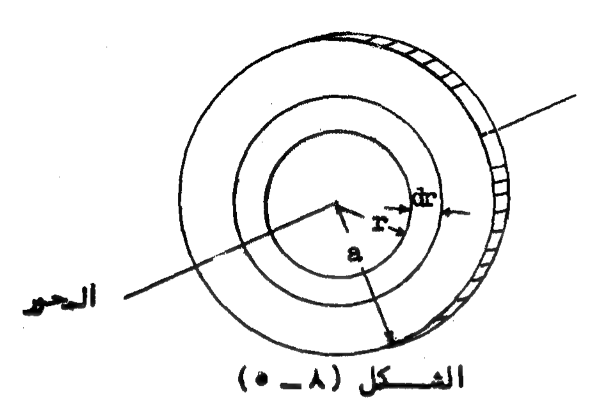
$$I = \int_0^a \rho\,(r^2)(2\pi r\, dr) = 2\pi\rho\,\frac{a^4}{4} = \tfrac{1}{2}\, ma^2 \qquad (٨ـ٣٣)$$

والخطوة الاخيرة تنتج من العلاقة $m = \rho\pi a^2$ ٠

من الواضح ، ان المعادلة (٨ـ٣٣) تستخدم كذلك لاسطوانة دائرية قائمة منتظمة نصف قطرها a وكتلتها m ، والمحور هو المحور المركزى للاسطوانة٠

الكرة

لنجد عزم القصور الذاتي لكرة صلدة منتظمة نصف قطرها a وكتلتها m حول محور (المحور ـ z) يمر من مركزها ٠ سوف نقسم الكرة الى اقراص دائرية رقيقة ،

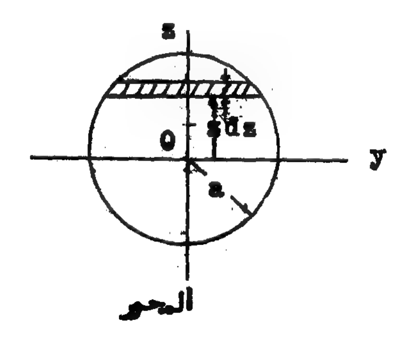


الشــكل (٨ ـ ٥)

المحاور لايجاد عــزم القصور الذاتي للقرص

كما هو مبين في الشكل (٨ ـ ٦) من المعادلة (٨ ـ ٣٣) يكون عــزم القصور الذاتي لهذا القرص النموذجي الذى نصف قطره y هو $\frac{1}{2}y^2\,dm$. ولكن $dm = y^2 dz.\rho\pi$ اذن

$$I = \int_{-a}^{a} \rho\, \tfrac{1}{2}\pi y^4\, dz = \int_{-a}^{a} \tfrac{1}{2}\pi\rho (a^2-z^2)^2 dz = \frac{8}{15}\pi\rho a^5 \quad (٨ ـ ٣٤)$$



الشــكل (٨ ـ ٦)

المحاور لايجاد عــزم القصورالذاتي لكرة حول المحور ـ z

على الطالب استنتاج الخطوة الاخيرة . ولما كانت الكتلة m هي

$$m = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$$

اذن

$$I = \frac{2}{5} ma^2$$ (٨ ــ ٣٥)

قشــرة كرويــة Spherical Shell

يمكن ايجاد عــز م القصور الذاتي لقشرة رقيقــة كرويــة منتظمــة بسهولة من تطبيــــق المعادلة (٨ ــ ٣٤) • فاذا فاضلناها بالنسبة الى a نحصل على

$$\frac{8}{3} \pi \rho a^4 da$$

وهذه النتيجــة هي عــز م القصور الذاتي لقشرة سمكها da ونصف قطرهــــــا a •

ولما كانت كتلــة القشرة تساوى $4\pi a^2 \rho da$ اذن يمكننا كتابــة ــ

$$I = \frac{2}{3} ma^2$$ (٨ ــ ٣٦)

لعــز م القصور الذاتي لقشرة رقيقــة نصف قطرها a وكتلتها m • وعلى الطالــــب التحقق من صحة هذه النتيجــة بالتكامل المباشر •

نظرية المحاور المتعامدة Perpendicular-axis Theorem

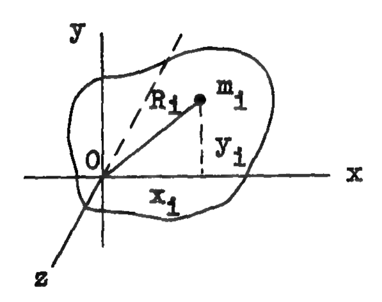
افرض ان جسمًا صلدًا على شكل صفيحة رقيقــة مستوية اعتباطية الشكل • لنضع هــذه الصفيحة في المستوى ــ xy (الشكل ٨ ــ ٧) • فعــز م القصور الذاتي حــــول المحور ــ z اذن يكون

$$I_z = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2$$

ولكن المجموع $\sum_i m_i x_i^2$ هو عــز م القصور الذاتي I_y حول المحور ــ y ، لان z_i يساوى صفرا لجميع الجسيمات • وبالتماثل $\sum_i m_i y_i^2$ يمثل عــز م القصــــور الذاتي I_x حول المحور ــ x • اذن يمكن كتابة المعادلة السابقة على النحو التالي ــ

$$I_z = I_x + I_y$$ (٨ ــ ٣٧)

هذه هي نظرية المحاور المتعامدة ٠ اى ان عـزم القصور الذاتي لاى صفيحة مستوية حول محور عمودى على سطحها يساوى مجموع عزمي القصور الذاتي حول اى محورين متعامدين يقعان في مستوى الصفيحة ويمران بالمحور العمودى ٠



الشكل (٨ ـ ٧)

نظرية المحاور المتعامدة

كمثال لاستخدام هذه النظرية ، لنفرض قرصا دائريا رقيقا في المستوى ـ xy (الشكل ـ ٨ ـ ٨) من المعادلة (٨ ـ ٣٣) عندنا ـ

$$I_z = \frac{1}{2} ma^2 = I_x + I_y$$

ولكن هذه الحالة نعرف ان $I_x = I_y$ من التناظر ٠ اذن يجب ان نحصل على ـ

$$I_x = I_y = \frac{1}{4} ma^2 \qquad (٨ ـ ٣٨)$$

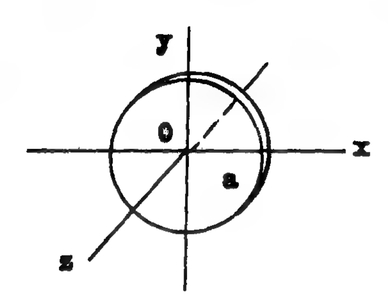
لعزم القصور الذاتي حول اى محور في مستوى القرص ويمر من مركزه ٠ والمعادلة (٣ ـ ٣٨) يمكن استنباطها ايضا من التكامل المباشر ٠

نظرية المحاور المتوازية Parallel-axis Theorem

افرض معادلة القصور الذاتي حول اى محور كالمحور ـ z

$$I = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

يمكننا الآن التعبير عن x_i و y_i بدلالة احداثيات مركز الكتلة



الشكل (٨ ــ ٨)

(x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}) والاحداثيات ($\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$, $\bar{z}_i$) بالنسبة الى مركز الكتلة (الشكل ٨ ــ ٩) كما يلي ــ

(٨ ــ ٣٩) $$x_i = x_{cm} + \bar{x}_i \qquad y_i = y_{cm} + \bar{y}_i$$

بعد التعويض وتجميع الحدود نحصل على

(٨ ــ ٤٠) $$I = \sum_i m_i(\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2) + \sum_i m_i(x_{cm}^2 + y_{cm}^2) + 2x_{cm}\sum_i m_i\bar{x}_i + 2y_{cm}\sum_i m_i\bar{y}_i$$

المجموع الاول من اليمين هو عزم القصور الذاتي حول محور مواز للمحور ــ z ويمر في مركز الكتلة . سنسميه I_{cm} . من الواضح ان المجموع الثاني يساوى كتلة الجسم مضروبة في مربع المسافة بين مركز الكتلة والمحور ــ z . ولنسم هذه المسافة ℓ .

اى ان $$\ell^2 = x_{cm}^2 + y_{cm}^2$$

من تعريف مركز الكتلة عندنا

$$\sum_i m_i\bar{x}_i = \sum_i m_i\bar{y}_i = 0$$

اذن ، المجموعان الاخيران في يمين المعادلة(٨ ـ ٤٠) يتلاشيان والنتيجة الاخيرة تكتب على النحو التالي ـ

$$I = I_{cm} + m\ell^2 \qquad (٨ ـ ٤١)$$

هذه هي نظرية المحاور المتوازية ، والتي يمكن تطبيقها على اى جسم صلد ، مجسم او صفيحة ، وتنص النظرية في الواقع على ان عزم القصور الذاتي للجسم الصلد حول اى محور يساوى عزم القصور الذاتي حول محور مواز له ويمر من مركز الكتلة زائداً حاصل ضرب كتلة الجسم في مربع المسافة بين المحورين .

وعند تطبيق النظرية السابقة على القرص الدائرى ، نحصل من المعادلتين (٨ ـ ٣٣) و (٨ ـ ٤١) على

$$I = \tfrac{1}{2} ma^2 + ma^2 = \frac{3}{2} ma^2 \qquad (٨ ـ ٤٢)$$

لعزم القصور الذاتي لقرص دائرى منتظم حول محور عمودى على سطح القرص ويمر من حافته . اضف الى ذلك ، من المعادلتين (٨ ـ ٣٩) و (٨ ـ ٤١) نجد ان

$$I = \tfrac{1}{4} ma^2 + ma^2 = \frac{5}{4} ma^2 \qquad (٨ ـ ٤٣)$$

لعزم القصور الذاتي حول محور واقع في مستوى القرص ومماس لحافته .

نصف قطر التدويم Radius of Gyration

من الملائم ، لبعض الاغراض ، التعبير عن عزم القصور الذاتي للجسم الصلد بدلالة المسافة k والتي تسمى بنصف قطر التدويم ، حيث k يعرف بالمعادلة التالية ـ

$$I = mk^2$$

او (٨ ـ ٤٤)

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

فعلى سبيل المثال ، ان نصف قطر التدويم لقضيب دقيق حول محور يمر من احد طرفيه [بالرجوع للمعادلة (٨ ـ ٣٠)] هو ـ

$$k = \sqrt{\frac{\tfrac{1}{3} ma^2}{m}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

ويمكن ترتيب عــزوم القصور الذاتيه لاجسام مختلفة بسهولة على صورة جدول وذلــك بدرج مربع انصاف اقطار التدويــم لها كما هو في الجدول (٨ ــ ١)

جــدول رقم (٨ ــ ١)

قيــم k^2 لمختلف الاجســـام

(عــزم القصور الذاتي = الكتلة × k^2)

الجســـم	المحـــــور	k^2
قضيب رفيــع	عمودى على القضيب ويمر من مركـــزه	$\frac{a^2}{12}$
طولـــه a	عمودى على القضيب ويمر من احد طرفيه	$\frac{a^2}{3}$
صفيحه رقيقه متوازية الاضلاع ، ضلعاها	يمر من المركز ومواز للضلــع b	$\frac{a^2}{12}$
a و b	يمر من المركز وعمودى على الصفيحه	$\frac{a^2 + b^2}{12}$
قرص دائرى رقيق نصف	يمر من المركز وواقع في مستوى القرص	$\frac{a^2}{4}$
قطـــــره a	يمر من المركز وعمودى على القـــرص	$\frac{a^2}{2}$
حلقة رفيعه نصــف	يمر من المركز وواقع في مستوى الحلقة	$\frac{a^2}{2}$
قطرهــا a	يمر من المركز وعمودى على سطحهــا	a^2
قشرة اسطوانية رقيقه نصف قطرها a وطولها b	محورهـا الطولي المركـــــزى	a^2

اسطوانه دائريه قائمـه صلده نصف قطرهـا a وطولها b	محورها الطولي المركزى	$\frac{a^2}{2}$
	يمر من مركزها وعمودى على محورها الطولي المركـزى	$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{12}$
قشرة كروية نصف قطرها a	اى قطـر	$\frac{2}{3} a^2$
كرة صلده منتظمـة نصف قطرهـا a	اى قطـر	$\frac{2}{5} a^2$
متوازى المستطيلات منتظم صلد ، اضلاعـه a ، b ، c	يمر من المركز وعمودى على الوجه ab ، وهو مواز للحافـه c	$\frac{a^2 + b^2}{12}$

٨ ـ ٥) البندول الفيزيائي The Physical Pendulum

الجسم الصلد الذى يتأرجح بحرية تحت تأثير ثقلـه حول محور افقي ثابت للدوران يسمى بالبندول الفيزيائي أو البندول المركـب Compound Pendulum .

والشكل (٨ ـ ١٠) يبين بندول فيزيائي ، فيـه O تمثل موضع محور الدوران ، و CM مركز كتلتـه . والمسافة بين O و CM هي ℓ كما هو موضح .

وبتمثيل الزاوية بين الخط OCM والخط الشاقولي OA بالرمز θ يكـون مقدار عـزم القوة التثاقلية (تعمل في CM) حول محور الدوران على النحو التالـي

$$mg\ell \sin\theta$$

معادلة الحركة الاساسية

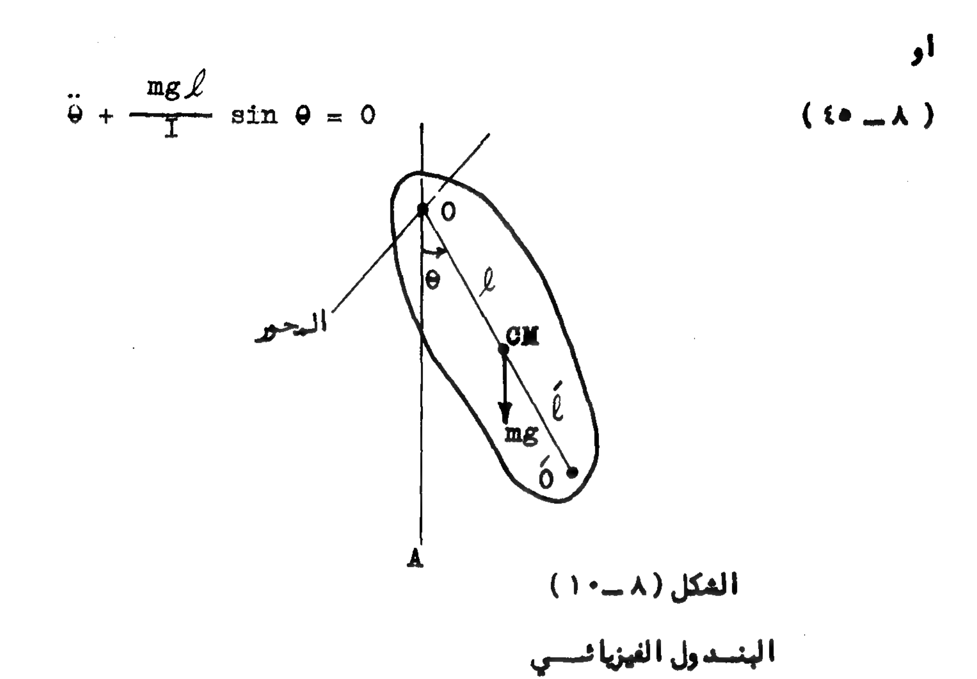
$$\frac{dL}{dt} = I\dot{\omega}$$

عندئذ تأخذ الشكل التالي

$$-mg\ell \sin\theta = I\ddot{\theta}$$

او

$$\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{I} \sin \theta = 0 \qquad (٨ - ٤٥)$$



الشكل (٨ ـ ١٠)

البنـدول الفيزيائـي

هذه المعادلة تماثل معادلة البندول البسيط بالشكل ، وكما هي الحالة في البندول البسيط، يمكننا هنا الاستعاضة عن $\sin \theta$ بالزاوية θ لذبذبات صغيرة ، اى

$$\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{I} \theta = 0 \qquad (٨ - ٤٦)$$

وحلها هـو

$$\theta = \theta_0 \cos (2\pi ft + \epsilon) \qquad (٨ - ٤٧)$$

حيث θ_0 هي السعة و ϵ زاوية الطور، وتردد التذبذب f يكـون

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mg\ell}{I}} \qquad (٨ - ٤٨)$$

اذ ن ، زمن الذبذبة هو

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\ell}}$$ (٨ ــ ٤٩)

(لتلافي الارباك الذى قد يحصل ، سوف لا نستعمل رمزا معينا لتسمية التردد الزاوى $2\pi f$) ، ويمكننا كذلك التعبير عن زمن الذبذبة بدلالة نصف قطر التدوم k اى

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2}{g\ell}}$$ (٨ ــ ٥٠)

فزمن الذبذبة اذ ن هو نفس زمن ذبذبة بندول بسيط طوله k^2/ℓ.

وعلى سبيل المثال ، قضيب رفيع منتظم طوله a يتأرجح كبندول فيزياوي حول احد طرفيه ($k^2 = a^2/3$) بزمن ذبذبة مقداره

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}}$$

مركز التذبذب Center of Oscillation

باستخدام نظرية المحاور المتوازية ، يمكننا التعبير عن نصف قطر التدوم k بدلالة نصف قطر التدوم حول مركز الكتلة k_{cm} كما يلي

$$I = I_{cm} + m\ell^2$$

او

$$mk^2 = mk_{cm}^2 + m\ell^2$$

وعند اختصار m's من كل حد نحصل على

$$k^2 = k_{cm}^2 + \ell^2$$ (٨ ــ ٥١)

اذ ن يمكن كتابة المعادلة (٨ ــ ٥٠) على النحو التالي

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k_{cm}^2 + \ell^2}{g\ell}}$$ (٨ ــ ٥٢)

افرض ان محور دوران بندول فيزيائي قد ازيح الى موضع آخر O' وعلى مسافة ℓ' من مركز الكتلة ، كما هو مبين في الشكل (٨ ـ ١٠) ، فزمن الذبذبة T' حول هذا المحور الجديد يكون

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{k_{cm}^2 + \ell'^2}{g\ell'}}$$

نستنتج من ذلك ان زمني التذبذب حول O وحول O' سيكونان متساويين ، اذا كان

$$\frac{k_{cm}^2 + \ell^2}{\ell} = \frac{k_{cm}^2 + \ell'^2}{\ell'}$$

والمعادلة السابقة تبسط بسهولة الى

$$\ell\ell' = k_{cm}^2 \qquad (٨ ـ ٥٣)$$

فالنقطة O' التي ترتبط بالنقطة O بالمعادلة السابقة تسمى بمركز التذبذب للنقطة O .

وواضح ان O هي ايضا مركز تذبذب للنقطة O' . اذن لقضيب طوله a يتأرجح حول طرف واحد يكون $\ell = a/2$, $k_{cm}^2 = a^2/12$. لذا من المعادلة (٨ ـ ٥٣) ، $\ell' = a/6$ ، ولذلك سيكون للقضيب الذى يتأرجح حول محور يبعد مسافة $a/6$ من المركز، نفس زمن الذبذبة ، فيما لو مر المحور من احد طرفيه .

٨ ـ ٦) نظرية عامة تتعلق بالزخم الزاوى

A General Theorem Concerning Angular Momentum

لاجل دراسة الحالة الاكثر عمومية لحركة الجسيم الصلد ، اى التي يكون فيها محور الدوران غير ثابت ، نحتاج الى استنباط نظرية اساسية للزخم الزاوى. رأينا في البند (٧ ـ ٢) ان معدل التغير الزمني للزخم الزاوى لأية منظومة يساوى العزم المسلط عليها ، اى

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \qquad (٨ ـ ٥٤)$$

اوعلى نحو واضح

$$\frac{d}{dt}\sum_i(\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i) = \sum_i(\vec{r}_i \times \vec{F}_i) \qquad (٨ - ٥٥)$$

حيث نسبت جميع كميات المعادلة المذكورة اعلاه الى محاور نيوتونيــة .

لندخل الآن مركز الكتلــة وذلك بالتعبير عن متجـه الموضع لكل جســـم $\vec{r}_i$ بدلالة موضع مركز الكتلــة $\vec{r}_{cm}$ ومتجــه موضع الجسيم i بالنسبة الى مركز الكتلـــة $\vec{\bar{r}}_i$ (كما في البند ٧ ـ ٣)، هــو

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{\bar{r}}_i$$

و

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{\bar{v}}_i$$

عندئذ المعادلة (٨ ـ٥٥) تصبح

$$\frac{d}{dt}\sum_i\left[(\vec{r}_{cm} + \vec{\bar{r}}_i) \times m_i(\vec{v}_{cm} + \vec{\bar{v}}_i)\right] = \sum_i(\vec{r}_{cm}+\vec{\bar{r}}_i) \times \vec{F}_i \qquad (٨ - ٥٦)$$

وعندفك الحدود واستخدام حقيقة كون تلاشي الكميتين $\sum m_i\vec{\bar{v}}_i$, $\sum m_i\vec{\bar{r}}_i$ نجد أن المعادلة (٨ ـ ٥٦) تبسط الى

$$\vec{r}_{cm}\times\sum_i m_i\vec{a}_{cm} + \frac{d}{dt}\sum_i\vec{\bar{r}}_i\times m_i\vec{\bar{v}}_i = \vec{r}_{cm}\times\sum_i\vec{F}_i + \sum_i\vec{\bar{r}}_i\times\vec{F}_i \qquad (٨ - ٥٧)$$

حيث

$$\vec{a}_{cm} = \dot{\vec{v}}_{cm}$$

رأينا في البند (٧ ـ١) ان الحركة الانتقالية لمركز كتلــة اية منظومــة من الجسيمات تخضع للمعادلة

$$\sum_i\vec{F}_i = \sum_i m_i\vec{a}_i = m\vec{a}_{cm} \qquad (٨ - ٥٨)$$

لذلك يختصر الحد الاول من يسار المعادلة (٨ ـ٥٧) مع الحد الاول من يمينهـــا . والنتيجة النهائية تكون

$$\frac{d}{dt}\sum_i\vec{\bar{r}}_i \times m_i\vec{\bar{v}}_i = \sum_i\vec{\bar{r}}_i \times \vec{F}_i \qquad (٨ - ٥٩)$$

والمجموع في يسار المعادلة المذكورة اعلاه عبارة عن الزخم الزاوى للمنظومة حول مركـــز الكتلة ، والمجموع على يمينها هو العــزم الكلي لجميع القوى الخارجية حول مركز الكتلة ٠ وعند تسمية هاتين الكميتين $\vec{L}$ و $\vec{N}$ على التتالي ، نحصل على

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \qquad (٨ـ٦٠)$$

هذه النتيجة المهمة تنص على ان معدل التغير الزمني للزخم الزاوى حول مركز الكتلـــة لاى منظومة يساوى العــزم الكلي للقوة الخارجية حول مركز الكتلة ٠ وتكون هذه صحيحة حتى لو كان مركز الكتلة يتحرك بتعجيل ٠ واذا اخترنا اية نقطة اخرى عدا مركز الكتلـــة كنقطة مرجعية ، عندئذ يجب ان تكون هذه النقطة في حالة سكون في نظـام المحـــاور النيوتونيـــة (باستثناء حالات خاصة معينة فسوف لن نحاول شرحها) وسنعطي مثـــالا لاستخدام النظرية المذكورة اعلاه في البند ٨ ــ ٨ ٠

٨ ــ ٧) الحركة الصفائحية للجسم الصلد

Laminar Motion of a Rigid Body

اذا كانت حركة الجسم بحيث تتحرك جميع جسيماتـــه بموازاة لمستو ثابت ، عندئــذ تسمى الحركة بالصفائحية Laminar ٠ قد يغير محور الدوران موضعـــه في الحركـــة الصفائحية ولكن لايغير اتجاهـــه.الدوران حول محور ثابت هو حالة خاصة للحركـــــة الصفائحية ٠ ان تدحرج اسطوانة على سطح مستو هو مثال آخر على الحركة الصفائحية ٠

اذا عانى جسم ازاحـــة صفائحية ، فهذه الازاحة يمكن وصفها كما يلي : اختر نقطـة مرجعية في الجسم ، كمركز الكتلة مثلا ٠ فالنقطة المرجعية ستعاني ازاحة ما مثل $\Delta\vec{r}$ ، بالاضافة الى دوران الجسم حول النقطة المرجعية خلال زاوية ما مثل $\Delta\phi$ ٠ وهكــذا يمكن وصف اية ازاحة صفائحية وصفا كاملا ٠ ووفقا لذلك يمكن وصف الحركة الصفائحيـــة وصفا كاملا عندما تعطى السرعة الانتقالية لنقطة مرجعية ملائمة مع السرعة الزاوية ٠

المعادلة الاساسية التي تتحكم في حركة الجسم الصلد الانتقالية هي ـ

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}_{cm} = m\dot{\vec{v}}_{cm} = m\vec{a}_{cm} \qquad (٨ ـ ٦١)$$

حيث $\vec{F}$ تمثل مجموع جميع القوى الخارجية التي تؤثر على الجسم ، m الكتلة ، $\vec{a}_{cm}$ تعجيل مركز الكتلة .

ينتج من تطبيق المعادلة (٨ ـ ٢٥) لحالة حركة الجسم الصلد الصفائحية ان

$$\bar{L} = I_{cm}\omega \qquad (٨ ـ ٦٢)$$

لمقدار الزخم الزاوي حول محور C يمر من مركز الكتلة ، حيث ω هي الانطلاق الزاوي للدوران حول ذلك المحور . فالمعادلة الاساسية التي تتحكم في دوران الجسم ، اي المعادلة (٨ ـ ٦٠) عندئذ تصبح

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = I_{cm}\dot{\omega} = \bar{N} \qquad (٨ ـ ٦٣)$$

حيث $\bar{N}$ يمثل العزم الكلي للقوى المسلطة حول المحور C .

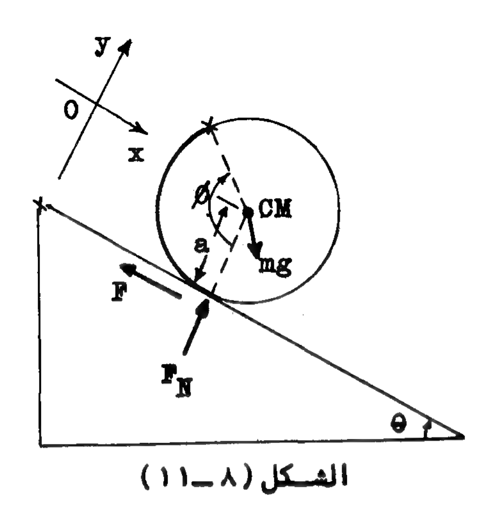
٨ ـ ٨) جسم يتدحرج اسفل مستوى مائل

Body Rolling Down an Inclined Plane

كتوضيح للحركة الصفائحية ، سندرس حركة جسم مستدير (اسطوانة ، كرة ، وما الى ذلك) يتدحرج اسفل سطح مائل . الشكل (٨ ـ ١١) يبين ثلاث قوى تؤثر على الجسم وهي (١) قوة الجاذبية التي تؤثر شاقوليا الى الاسفل (٢) رد الفعل العمودي للسطح $\vec{F}_N$ و(٣) قوة الاحتكاك $\vec{F}$ الموازية للسطح . وباختيار المحاور كما هو مبين في الشكل تكون معادلات مركبات حركة مركز الكتلة الانتقالية

$$m\ddot{x}_{cm} = mg \sin \theta - F \qquad (٨ ـ ٦٤)$$

$$m\ddot{y}_{cm} = -mg \cos \theta + F_N \qquad (٨ ـ ٦٥)$$



الشكل (٨ ـ ١١)

جسم يتدحرج اسفل سطح مائل

حيث θ تمثل زاوية ميل السطح عن الافق ، ولما كان الجسم يبقى ملامسا للسطح ، عندئذ

$$y_{cm} = \text{constant}$$

اي

$$\ddot{y}_{cm} = 0$$

اذن من المعادلة (٨ ـ ٦٥) ، نحصل على

$$F_N = mg \cos \theta \qquad (٨ ـ ٦٦)$$

ان القوة الوحيدة التي تسلط عزما حول مركز الكتلة هي قوة الاحتكاك $\vec{F}$. ومقدار هذا العزم يساوي Fa حيث a تمثل نصف قطر الجسم . المعادلة الدورانية اي المعادلة (٨ ـ ٦٣) ، تصبح اذن

$$I_{cm}\dot{\omega} = Fa \qquad (٨ ـ ٦٧)$$

ولشرح المسألة اكثر ، نحتاج الى وضع بعض الفرضيات بخصوص التلامس بين السطح والجسم . وسنحل معادلات الحركة لحالتين

الحركـة بدون انزلاق Motion with No Slipping

اذا كان التلامس خشنا تماما بحيث لايحدث انزلاق ، تكون عندنا العلاقـــات التاليـة

$$x_{cm} = a\phi$$
$$\dot{x}_{cm} = a\dot{\phi} = a\omega \qquad (٨ ــ ٦٨)$$
$$\ddot{x}_{cm} = a\ddot{\phi} = a\dot{\omega}$$

حيث ϕ تمثل زاوية الدوران ، عندئذ يمكن كتابة المعادلة (٨ ــ ٦٧) على النحو التالي

$$\frac{I_{cm}}{a^2}\ddot{x}_{cm} = F \qquad (٨ ــ ٦٩)$$

وبتعويض قيمة F المذكورة اعلاه في المعادلة (٨ ــ ٦٤) نحصل على

$$m\ddot{x}_{cm} = mg \sin\theta - \frac{I_{cm}}{a^2}\ddot{x}_{cm}$$

وعند حلها لـ $\ddot{x}_{cm}$ نجد ان

$$\ddot{x}_{cm} = \frac{mg \sin\theta}{m + (I_{cm}/a^2)} = \frac{g \sin\theta}{1 + (k_{cm}^2/a^2)} \qquad (٨ ــ ٧٠)$$

حيـث k_{cm} يمثل نصف قطر التدويـم حول مركز الكتلة ، فالجسم اذن يتدحرج اسفل السطح بتعجيل خطي ثابت وتعجيل زاوى ثابت وفقا للمعادلة (٨ ــ ٦٨) فمثـلا ، تعجيل اسطوانة منتظمة ($k_{cm}^2 = \frac{a^2}{2}$) يساوى

$$\frac{g \sin\theta}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} g \sin\theta$$

بينما الكرة المنتظمة ($k_{cm}^2 = 2a^2/5$) يساوى

$$\frac{g \sin\theta}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{5}{7} g \sin\theta$$

فرضيات الطاقـــة Energy Considerations

يمكن استنباط النتيجة السابقة ايضا من فرضيات الطاقة ، في مجال الجاذبيـــة المنتظم ، الطاقة الكامنة V للجسم الصلد تساوى مجموع الطاقات الكامنة لجسيماته ،

اى ان

$$V = \sum (m_i g z_i) = m g z_{cm}$$

حيث z_{cm} هي المسافة العمودية من مركز الكتلة الى مستوى مرجعي (اعتباطـــي) .

الآن اذا كانت القوى ، باستثناء قوة الجاذبية ، التي تؤثر على الجسم لاتنجز شغلا ، عندئذ تكون الحركة محافظة ويمكننا كتابة

$$T + V = T + m g z_{cm} = E = \text{constant}$$

حيث T تمثل الطاقــة الحركيــة

وفي حالة الجسم الذى يتدحرج اسفل السطح المائل ، الشكل ٨ ـــ ١١ ، الطاقــة الحركية للحركة الانتقالية تساوى $\frac{1}{2}m\dot{x}_{cm}^2$ وللحركة الدورانيــة تســـاوى $\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$ اى ان معادلة الطاقة تصبح

$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + m g z_{cm} = E$$

ولكن $z_{cm} = -x_{cm} \sin \theta, \omega = \dot{x}_{cm}/a$ اذن

$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}m k_{cm}^2 \frac{\dot{x}_{cm}^2}{a^2} - m g x_{cm} \sin \theta = E$$

وبتفاضلها بالنسبة للزمن t وتجميع الحدود نحصل على ـ

$$m\dot{x}_{cm}\ddot{x}_{cm}\left(1 + \frac{k_{cm}^2}{a^2}\right) - m g \dot{x}_{cm} \sin \theta = 0$$

وباختصار العامل المشترك $\dot{x}_{cm}$ (طبعا على فرض ان $\dot{x}_{cm} \neq 0$) وحلها لـ $\ddot{x}_{cm}$ نحصل على نفس النتيجة التي حصلنا عليها سابقا باستخدام القوى والعزوم .

* حدوث انــزلاق Occurrence of Slipping

لنفرض الآن ، الحالة التي يكون فيها التلامس مع السطح غير تام الخشونة اى ان هناك معاملا للاحتكاك الانزلاقي معينا مقداره μ . فاذا حدث انزلاق يكون مقدار قــوة الاحتكاك $\vec{F}$ عندئذ كالاتي

$$F = F_{max} = \mu F_N = \mu mg \cos \theta \qquad (٨ - ٧١)$$

ومعادلة الحركة الانتقالية (٨ ــ ٦٤) تصبح

$$m\ddot{x}_{cm} = mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta \qquad (٨ - ٧٢)$$

ومعادلة الحركة الدورانية (٨ ــ ٦٧) ، تكون

$$I_{cm} \dot{\omega} = \mu mga \cos \theta \qquad (٨ - ٧٣)$$

من المعادلة (٨ ــ ٧٢) نرى مرة ثانية ان مركز الكتلة يتحرك بتعجيل ثابت وهو

$$\ddot{x}_{cm} = g(\sin \theta - \mu \cos \theta) \qquad (٨ - ٧٤)$$

وفي الوقت نفسه يكون التعجيل الزاوى ثابتا :

$$\dot{\omega} = \frac{\mu mga \cos \theta}{I_{cm}} = \frac{\mu ga \cos \theta}{k_{cm}^2} \qquad (٨ - ٧٥)$$

لنكامل هاتين المعادلتين بالنسبة للزمن t ، على فرض ان الجسم يبدأ من

السكون، اى عندما $\dot{\phi}=0,\ \dot{x}_{cm}= 0,\ t = 0$ ، نحصل على

$$\dot{x}_{cm} = g(\sin \theta - \mu \cos \theta)t \qquad (٨ - ٧٦)$$
$$\omega = \dot{\phi} = g(\mu a \cos \theta/k_{cm}^2)t$$

ووفقا لذلك ، النسبة بين الانطلاق الخطي والزاوى تكون ثابتة ، عندئذ يمكننا كتابة

$$\dot{x}_{cm} = \gamma a \omega$$

حيث

$$\gamma = \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta}{\mu a^2 \cos \theta/k_{cm}^2} = \frac{k_{cm}^2}{a^2}\left(\frac{\tan \theta}{\mu} - 1\right) \qquad (٨ - ٧٧)$$

ولكن $a\omega$ لايمكن ان تكون اكبر من $\dot{x}_{cm}$ ، لذلك γ لايمكن ان تكون اقل

من واحد ، عندما يكون هناك تدحرج فقط (نقي) اى في الحالة المحدده ، تعطى

من $\dot{x}_{cm} = a\omega$ ، اى ان

$$\gamma = 1$$

عند حل المعادلة (٨ ــ ٧٧) للعامل μ مع ١ = γ ، نجد ان قيمة μ الحرجة تكون

$$\mu_{crit} = \frac{\tan \theta}{1 + (a/k_{cm})^2} \qquad (٨ــ٧٨)$$

اذا كانت μ اكبر من المقدار المذكور اعلاه ، عندئذ يتدحرج الجسم بدون انزلاق ، فمثلا ، اذا وضعت كرة على سطح ميله ٤٥° ستدحرج بدون انزلاق على ان تكون μ اكبر من $\tan 45^\circ/(1+\frac{5}{2})$ أو $2/7$

٨ ــ ٩) حركة جسم صلد تحت تأثير قوة دافعة

Motion of a Rigid Body Under an Impulsive Force

في الفصل السابق ادخلنا مفهوم القوة الدافعة Impulsive Force التي تؤثر على جسيم ، وجدنا ان تأثير هذه القوة ، او الدفع ، هو احداث تغير مفاجئ في سرعة الجسيم . وفي هذا البند سوف نتوسع في مفهوم الدفع لحالة الحركة الصفائحية لجسم صلد ممتد .

الحركة الحرة Free Motion

افرض ان جسما حر الحركة في مستو وقد سلط عليه دفع مثل $\hat{\vec{P}}$. عندئذ ، علينا اخذ كل من الحركة الانتقالية والدورانية وفقا للنظرية العامة التي بحثت في البند (٨ ــ ٧) ، اولا ، الحركة الانتقالية تعطى بالعلاقة العامة التالية

$$\vec{F} = m\dot{\vec{v}}_{cm}$$

اذا كانت نوعية القوة $\vec{F}$ دافعة ، فنحصل على

$$\int \vec{F}\, dt = \hat{\vec{P}} = m \, \Delta \vec{v}_{cm}$$

اذن ينتج بسبب الدفع تغير في سرعة مركز الكتلة مقداره

$$\Delta \vec{v}_{cm} = \frac{\hat{\vec{P}}}{m} \qquad (٨ــ٧٩)$$

ثانيا ، دوران الجسم تتحكم فيه المعادلة التالية

$$N = \dot{L} = I_{cm}\dot{\omega}$$

ويمكننا التكامل بالنسبة للزمن t للحصول على العلاقة التالية

$$\int N\,dt = I_{cm}\Delta\omega \qquad (٨-٨٠)$$

ونسمي التكامل $\int N\,dt$ بالدفع الدوراني . ولنستخدم الرمز $\hat{L}$ للاشارة اليـــه .
تأثير الدفع الدوراني عندئذ ، هو تغير سرعة الجسم الزاوية بالمقدار

$$\Delta\omega = \frac{\hat{L}}{I_{cm}} \qquad (٨-٨١)$$

واذا سلط الدفع الاولي $\hat{P}$. على الجسم بحيث يكون خط تأثيره على بعد b من مركز الكتلة ، فالعــزم عندئذ يساوى $N=Fb$ ووفقا لذلك

$$\hat{L} = \hat{P}b \qquad (٨-٨٢)$$

ويمكننا عندئذ التعبير عن التغيير في السرعة الزاوية الناتجة عن الدفع كما يلي

$$\Delta\omega = \frac{\hat{P}b}{I_{cm}} \qquad (٨-٨٣)$$

والخلاصة ـ تاثير الدفع على جسم صلد حر الحركة في حركة صفائحية هو (١) احـداث تغير مفاجيء في سرعة مركز الكتلة ـ التاثير الانتقالي و (٢) احداث تغيير مفاجيء في سرعة الجسم الزاوية ـ التاثير الدوراني .

الحركــة المقيــدة Constrained Motion

اذا سلط دفع على جسم غير حر الحركة ولكنــه مقيد ليدور حول محور ثابت لـــه ، نحتاج ان ناخذ بعين الاعتبار الشرط الدوراني فقط $N=I\dot{\omega}$. اذن

$$\int \vec{N}\,dt = \hat{L} = I\Delta\omega$$

في المعادلة المذكورة اعلاه ، I يمثل عــزم القصور الذاتي حول المحور الثابـــت للدوران ، و $\vec{N}$ هو العــزم حول ذلك المحور . وفي هذه الحالة ، الدفع الدوراني $\hat{L}$ الذى ينتج عن دفع اولي منفرد $\hat{P}$ يقع خط تاثيره على مسافة b من محـــور

الدوران يعطى ايضا من

$$\hat{L} = \hat{P}b$$

بحيث

$$\Delta \omega = \frac{\hat{P}b}{I} \qquad (٨ــ٨٤)$$

يمثل التغير في السرعة الزاوية حول محور الدوران الثابت .

تاثير عدة دفوع آنية

Effect of Several Simultaneous Impulses

اذا سلطت عدة دفوع مختلفة على جسم صلد في وقت واحد ، فمحصلة التغير في سرعة مركز الكتلة والسرعة الزاوية للجسم تنتج من جمع الدفوع والعزوم كما يجب على التالي. اذن ، نحصل على التاثير الانتقالي لعدد من الدفوع من الجمع الاتجاهي الفردى لها ، اى ان المعادلة (٨ ــ ٧٩) تصبح

$$\Delta \vec{v}_{cm} = \frac{\hat{\vec{P}}_1 + \hat{\vec{P}}_2 + \cdots}{m} \qquad (٨ــ٨٥)$$

وبالتماثل ، للتاثير الدوراني ، بعد تحوير المعادلة (٨ ــ ٨٣) نحصل على

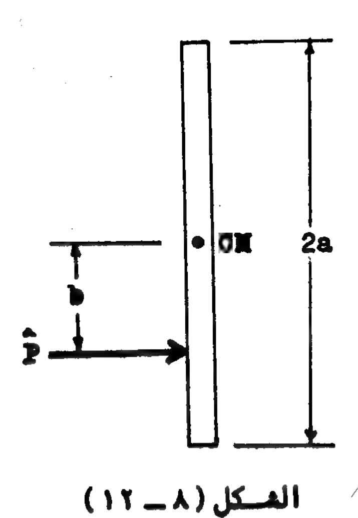
$$\Delta \omega = \frac{\hat{P}_1 b_1 + \hat{P}_2 b_2 + \cdots}{I_{cm}} \qquad (٨ــ٨٦)$$

في حالة جسم حركته مقيدة حول محور ثابت يوجد دفع ثانوى ناشئ عن رد فعل المحور على الجسم متى ما سلط دفع خارجي . عندئذ تستنبط الحركة من مجموع جميع الدفوع وفقا للمعادلات المذكورة اعلاه .

أمثلــــة

١ ــ دفع مسلط على قضيب حركته حرة Impulse Applied to a Free Rod

كتوضيح للنظرية المذكورة اعلاه ، افرض ان قضيبا يتزلق بحرية على سطح افقي املس . وقد سلط دفع $\hat{P}$ باتجاه عمودى على طول القضيب وعلى مسافة b من مركز كتلته ، كما هو مبين في الشكل (٨ ــ ١٢) .



الشكل (٨ ــ ١٢)
دفع مسلط على قضيب حركته حره

اذا كان القضيب في البداية ساكنا ، عندئذ تكون معادلتا الحركة الانتقالية والدورانية على التالي ــ

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{\hat{P}}}{m} \qquad (٨ــ٨٧)$$

$$\omega = \frac{\hat{P}b}{I_{cm}} \qquad (٨ــ٨٨)$$

وبصورة خاصة اذا كان القضيب منتظما وطوله يساوي $2a$ ، عندئذ $I_{cm}=ma^2/3$ ووفقا لذلك ــ

$$\omega = \hat{P}\,\frac{3b}{ma^2} \qquad (٨ــ٨٩)$$

ولذلك تكون السرعة التي تعطى لمركز الكتلة هي نفسها بغض النظر عن نقطة تأثير الدفع •

بينما تعتمد السرعة الزاوية التي يكتسبها القضيب على موقع الدفع المسلط• ونرى ايضا ، ان الطاقة الحركية النهائية للقضيب هي

$$T = \tfrac{1}{2}mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{3\hat{P}^2}{2m}\left(\frac{b}{a}\right)^2$$

وواضح ان هذا يعتمد على النقطة التي يسلط فيها الدفع •

٢ـ دفع مسلط على قضيب مقيد ليدور حول محور ثابت

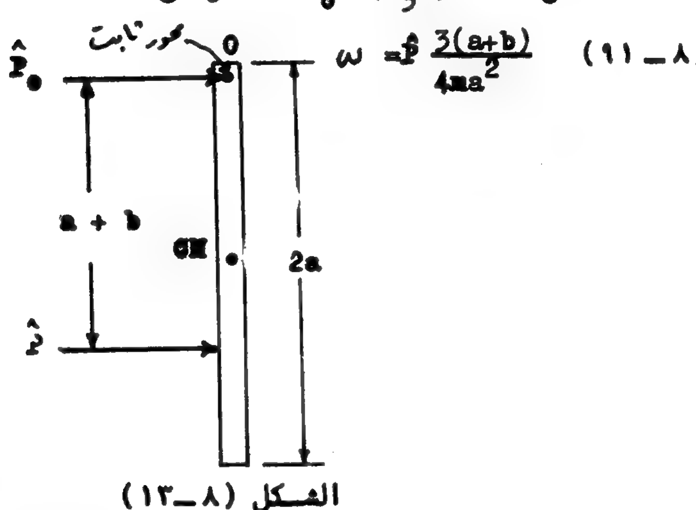
Impulse Applied to a Rod Constrained to Rotate about a Fixed Axis

لنفرض بعد ذلك الحالة التي يكون فيها القضيب نفسه مقيداً ليدور حول محور ثابت. افرض ان موضع المحور O في احد طرفي القضيب كما هو مبين في الشكل (٨ ـ ١٣) . في هذه الحالة نجد ان معادلة الحركة الدورانية تكون على النحو التالي

$$L = \hat{P}(a + b) = I_o \omega \qquad (٨ــ٩٠)$$

عندئذ ، لما كان $I_o = (\frac{4}{3})ma^2$ ، نحصل على

$$\omega = \hat{P}\,\frac{3(a+b)}{4ma^2} \qquad (٨ــ٩١)$$



الشكل (٨ــ١٣)

دفع $\hat{P}$ مسلط على قضيب مقيد ليدور حول احد طرفيه .
$\hat{P}_o$ هو رد فعل الدفع في المحور

للسرعة الزاوية التي يكتسبها القضيب . والآن ، لما كان القضيب يدور حول النقطة O ، فمركز الكتلة يتحرك بانطلاق مقداره

$$v_{cm} = a\omega$$

او

$$v_{cm} = \hat{P}\,\frac{3(a + b)}{4\,ma}$$

نلاحظ ان هذه لاتساوي $\hat{P}/m$. وللنظرة الاولى قد تظهر هذه النتيجة مناقضة للمعادلة

العامة للحركة الانتقالية ، المعادلة (٨ ــ ٧٩) ، وفي الحقيقة • لايوجد هنـــاك تناقض ، لانـه يوجد دفع آخر يعمل على القضيب في الوقت نفسه كدفع اولى • وهـــذ ا الدفع الثاني هو دفع رد الفعل الذى يسلطـه المحور في O على القضيب• ولنسـم دفع رد الفعل هذا $\hat{\vec{P}}_o$ • عندئذ يكون الدفع الكلي المسلط على القضيب هو المجموع الاتجاهي $\hat{\vec{P}} + \hat{\vec{P}}_o$ • ووفقا لذلك تكون السرعة التي يكتسبها مركز الكتلـة هي ــ

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\hat{\vec{P}} + \hat{\vec{P}}_o}{m} \qquad (٨ ــ ٩٣)$$

ويمكننا الآن حساب قيمة $\hat{\vec{P}}_o$ باستعمال قيمة $\vec{v}_{cm}$ من المعادلة (٨ ــ ٩٢) • اذن

$$\hat{P}\,\frac{3(a + b)}{4ma} = \frac{\hat{\vec{P}} + \hat{\vec{P}}_o}{m}$$

التي تعطي

$$\hat{\vec{P}}_o = \hat{\vec{P}}\,\frac{3b - a}{4a} \qquad (٨ ــ ٩٤)$$

للدفع الذى يكتسبه القضيب من المحور المقيد • من قانون الفعل ورد الفعل يكـــون $\hat{\vec{P}}_o$ ــ الدفع الذى يسلطـه القضيب على المحور في O •

علينا ملاحظـة ان دفع رد الفعل يتلاشى اذا اختيرت نقطة تاثير الدفع الاولـــى كما يجب • تسمى هذه النقطة بمركز الصدم center of percussion وفي حالة القضيب المذكور اعلاه تكون هذه النقطـة بحيث $b = a/3$

٨ ــ ١٠) تصادم الاجسام الصلده Collisions of Rigid Bodies

في المسائل التي تتضمن تصادم اجسام صلده ممتدة ، القوى التي تؤثر بها الاجسام بعضها على بعض اثناء التلامس تكون دائما متساوية ومتعاكسه • اذن تصح قوانيـــن حفظ الزخم الخطي والزاوى • ان مفهومي الدفع الدوراني والخطي سيساعدان غالبـــا في مثل هذه المسائل •

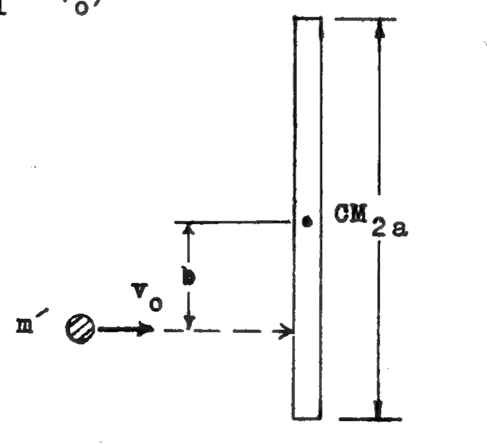
مثـــــال

تصادم كـرة وقضيب

افرض "مثلا" تصادم كرة كتلتها m' بقضيب منتظم طولـه $2a$ وكتلتـــــه m. ولنفرض ان القضيب في البداية كان ساكنا على سطح افقي املس ، كالسابق وان نقطـــة التصادم على مسافة b من مركز القضيب كما هو مبين في الشـــــكل (٨ ــ ١٤) . ان المعادلتين (٨ ــ ٨٧) و (٨ ــ ٨٨) تعطيان حركة القضيب بعد التصادم بدلالـة الدفع $\hat{\vec{P}}$ الذى يكتسبه القضيب من الكرة . نعلم ايضا ان الدفع الذى تتسلمه الكـــرة كنتيجة للدفع هو $-\hat{\vec{P}}$. لذلك يمكننا كتابة معادلات الحركة الانتقالية كما يلي

$$\hat{\vec{P}} = m\vec{v}_{cm} \quad (٨ــ٩٥)$$

$$-\hat{\vec{P}} = m'(\vec{v}_1 - \vec{v}_0) \quad (٨ــ٩٦)$$



الشكل (٨ ــ ١٤)

تصادم جسيم وقضيـــب

حيث $\vec{v}_{cm}$ تمثل سرعة مركز كتلة القضيب بعد التصادم ، $\vec{v}_0$ السرعة الابتدائية للكرة

قبل التصادم، و $\vec{v}_1$ السرعة النهائية للكرة. معادلتا الحركة الانتقالية يتضمنان حفظ الزخم الخطي لان عند حذف $\hat{\vec{P}}$ نحصل على ـ

$$m'\vec{v}_o = m'\vec{v}_1 + m\vec{v}_{cm} \qquad (٨ـ٩٧)$$

لاجل حساب دوران القضيب بعد التصادم، يمكننا استخدام قاعدة حفظ الزخم الزاوى. ان الزخم الزاوى الابتدائي للكرة حول مركز الكتلة هو $bm'v_o$ والزخم الزاوى النهائي هو $bm'v_1$. والزخم الزاوى الابتدائي للقضيب يساوى صفرا والزخم الزاوى النهائي يساوى $I_{cm}\omega$. اذن

$$bm'v_o = bm'v_1 + I_{cm}\omega \qquad (٨ـ٩٨)$$

ان معادلتي الانتقالية والدورانية المذكورتين اعلاه لاتعطيا لنا معلومات كافية لايجاد بورمترات السرع للحركة النهائية، اى v_1، v_{cm}، ω. فلاجل حساب الحركة النهائية بصورة كاملة، نحتاج الى معادلة اخرى. قد تكون هذه معادلة توازن الطاقة.

$$\tfrac{1}{2}m'v_o^2 = \tfrac{1}{2}m'v_1^2 + \tfrac{1}{2}mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\,\omega^2 + Q \qquad (٨ـ٩٩)$$

حيث Q تمثل الخسارة في الطاقة. وبطريقة اخرى، يمكننا استخدام معادلة معامل الارتداد.

$$\epsilon = \frac{\text{انطلاق الاقتراب}}{\text{انطلاق الابتعاد}}$$

في المسألة تحت البحث، عندنا v_o تساوى انطلاق الاقتراب.

لايجاد انطلاق الابتعاد، نحتاج معرفة انطلاق القضيب في نقطة التلامس. وهذا يعطي من مجموع الانطلاق الانتقالي لمركز الكتلة والانطلاق الدوراني لتلك النقطة بالنسبة للمركز. اذن انطلاق نقطة التلامس مباشرة بعد التصادم هو $v_{cm} + b\,\omega$.

ووفقا لذلك يمكننا كتابة سرعة الابتعاد = $v_{cm} + b\omega - v_o$

اذن

$$\epsilon v_o = v_{cm} + b\omega - v_o$$

عندنا الآن معادلات كافية لحل الحركة النهائية . وعند تعويض $I_{cm} = ma^2/3$ ،

نحصل على

$$v_{cm} = v_o(\epsilon + 1)\left(\frac{m}{m'} + 3\frac{b^2}{a^2} + 1\right)^{-1}$$

$$v_1 = v_o - \frac{m}{m'} v_{cm} \qquad (٨_١٠٠)$$

$$\omega = v_{cm}\left(\frac{3b}{a^2}\right)$$

وعلى القارىء تحقيق هذه النتيجة .

تمارين

٨_١ . جد مركز كتلة كل مما يأتي (آ) صفيحة رقيقة منتظمة شكلها ربع دائرة (ب) سلك دقيق حني بشكل ربع دائرة (جـ) مخروط صلد دائري قائم منتظم ارتفاعه h (د) المساحة المحددة بالقطع المكافىء $x^2 = by$ والمستقيم $y = b$ (هـ) الحجم المحدد بالقطع المكافىء المجسم $z=(x^2+y^2)/b$ والمستوى $z = b$.

٨_٢ . جد مركز كتلة ثمن قطع ناقص مجسم صلد منتظم انصاف محاوره a ، b ، c .

٨_٣ . جد مركز كتلة نصف كرة صلدة نصف قطرها a وكثافتها تتغير خطيا مع المسافة من المركز حيث تساوي صفرا في المركز و ρ_o خارجة .

٨_٤ . كرة منتظمة صلدة نصف قطرها a تحتوي على جوف كروي نصف قطره ($\frac{1}{2}a$) ومركزه في نقطة تبعد ($\frac{1}{2}a$) من مركز الكرة . جد مركز الكتلة .

٨_٥ . ماهي المسافة التي يصلها رجل وزنه W يصعد سلم طوله l ووزنه w قبل ان ينزلق . اذا كان السلم يستند الى جدار قائم خشن ؟ الزاوية بين السلم والارض تساوي θ . افرض ان معامل الاحتكاك μ هو نفسه بين السلم والحائط وبين السلم والارض .

٨ ـ ٦ ٠ سلك منتظم حني على شكل نصف دائرة وعلق على مسمار خشبي خشن ٠ فاذا كان الخط الواصل بين طرفي السلك يصنع زاوية θ مع الافق وكان السلك على حافة الانزلاق ٠ فما هو معامل الاحتكاك بين السلك والمسمار ؟

٨ ـ ٧ ٠ نصف كرة صلدة منتظمة تستند الى حائط عمودى وهي على حافة التوازن فاذا كان الجزء المدور لنصف الكرة في تماس مع الحائط والارض ومعامل الاحتكاك μ هو نفسه للحائط والارض ٠ جد الزاوية بين الوجه المستوى لنصف الكرة والارض ٠

٨ ـ ٨ ٠ قشرة منتظمة بشكل نصف كرة تستند الى سطح خشن مائل بزاوية θ وهي على حافة التوازن ٠ فاذا كان الجانب المدور للقشرة يمس المستوى ومعامل الاحتكاك يساوى μ ٠ جد ميلان القشرة ٠

٨ ـ ٩ ٠ اذا اثرت مجموعة القوى ($F_1, F_2, \ldots$) على جسم صلد وكان (آ) في حالة توازن انتقالي و (ب) في حالة توازن دوراني حول نقطة ما مثل O ٠ برهن ان مجموعة القوى هذه تكون ايضا في حالة توازن دوراني حول اى نقطة اخرى مثل O' ٠

٨ ـ ١٠ ٠ إثبت ان عزوم القصور الذاتي لمتوازى مستطيلات صلد منتظم ، قطع ناقص اسطواني ، قطع ناقص مجسم ، هي $\frac{m}{3}(a^2+b^2)$ ، $\frac{m}{4}(a^2+b^2)$ ، $\frac{m}{5}(a^2+b^2)$ على التتالي ، حيث m تمثل الكتلة و $2a$ ، $2b$ هي الاقطار الرئيسية للجسم الصلد وتكون عمودية على محور الدوران ويمر المحور خلال المركز في كل حالة ٠

٨ ـ ١١ ٠ اثبت ان عزم القصور الذاتي لثمن كرة صلدة منتظمة نصف قطرها a هو $\frac{2}{5}ma^2$ حول محور على طول احد حافاته المستقيمة ٠ حيث m تمثل كتلة الثمن (ملاحظة ـ هذه نفس العلاقة لكرة كتلتها m) ٠

٨ ـ ١٢ ٠ جد عزم القصور الذاتي لمخروط دائرى قائم صلد منتظم كتلته m حول

المحور المركزى ٠

٨ـ١٣ ٠ جد عـزم القصور الذاتي لصفيحة شكلها نصف دائرة حول محور يمر من مركـز الكتلـة وعمودى على مستوى الصفيحـة ٠

٨ـ١٤ ٠ قضيب رفيع AB طوله l وكتلتـه m ربط جسم كتلتـه m' في طرفه B ٠ جد ذبذبة القضيب اذا كان يتأرجح كبندول فيزيائي حول طرفـه A ٠

٨ـ١٥ ٠ صفيحة مربعة طول ضلعهـا a تتذبذب كبندول فيزيائي حول احدى زواياهـا ٠ جد زمن الذبذبة ومركز التذبذب اذا كان محور الدوران (آ) عموديا على الصفيحة و (ب) في مستوى الصفيحة ٠

٨ـ١٦ ٠ اثبت ان زمن ذبذبة البندول الفيزيائي تساوى $2\pi(d/g)^{\frac{1}{2}}$ ٠ حيـث d تمثل المسافة بين نقطة التعليق O ومركز التذبذب O' ٠

٨ـ١٧ ٠ كرة صلدة منتظمة لف حولها خيط رقيق لفات قليلة ٠ فاذا امسك طرف الخيـط بصورة ثابتة ثم تركت الكرة لتسقط تحت تأثير الجاذبية الارضية ٠جد تعجيل مركـز الكـرة ٠

٨ـ١٨ ٠ رجلان يمسكان طرفي لوح خشبي منتظم طولـه l وكتلتـه m ٠ فاذا تـرك احد الرجلين طرفـه بصورة مفاجئـة٠ اثبت ان الحمل يهبط عند الرجل الثانـي من mg/2 الى mg/4 .

٨ـ١٩ ٠ ثقلان كتلتاهما m_1 , m_2 ربطا بطرفي وتد خفيف لايقبل المد او البسـط ٠ فاذا كان الوتـد يمر على بكرة نصف قطرها a وعـزم قصورها الذاتي I ٠ جـد تعجيل الثقلين ٠ افرض ان $m_1 > m_2$ وقد اهمل الاحتكاك في محور البكـرة٠

٨ـ٢٠ ٠ اسطوانة دائرية قائمة منتظمة نصف قطرها a توازنت على اسطوانة ثابتـة خشـنة نصف قطرها b ($b > a$) بحيث كان محورا الاسطوانتين متوازيـين ٠

فاذا اقلق التوازن قليلا ، جد النقطة التي تترك فيها الاسطوانة المتدحرجة الاسطوانة الثابتة ٠

٨ــ٢١ ٠ قضيب طويل منتظم طوله l يقف عموديا على ارض خشنة ٠ اذا اقلق القضيب قليلا وسقط على الارض (آ) جد المركبتين العمودية والافقية لرد فعل الارض كدوال للزاوية θ بين القضيب والعمود في اية لحظة (ب) جد كذلك الزاوية التي يبدأ فيها القضيب بالانزلاق وماهو الاتجاه الذى يحدث فيه الانزلاق ٠ افرض ان μ هو معامل الاحتكاك بين القضيب والارض ٠

٨ــ٢٢ ٠ قذفت كرة في البداية بدون دوران بانطلاق v_0 اعلى سطح مائل خشن ميلانه θ ومعامل احتكاكه μ ٠ جد موضع الكرة كدالة للزمن ، واحسب الموضع الذى تبدأ فيه الكرة دورانا نقيا ٠ افرض ان μ اكبر من $\frac{2}{7}\tan\theta$ ٠

٨ــ٢٣ ٠ وضع قرص دائرى منتظم على سطح افقي املس ٠ فاذا ضرب باتجاه مماسي في نقطة على محيطه ، حول اية نقطة سيبدأ القرص بالدوران ؟

٨ــ٢٤ ٠ صنع بندول مقذوفات (بلستي) ballistic pendulum من لوح خشبي طوله l وكتلته m ٠ وهو حر الحركة حول احد طرفيه O ، وكان في البداية في حالة السكون بالوضع العمودى ٠ اطلقت عليه قذيفة كتلتها m' بصورة افقية وعلى مسافة l من O وسكنت فيه ٠ اذا كانت θ_0 تمثل سعة البندول الناتجة جد سرعة القذيفة ٠

٨ــ٢٥ ٠ لوح خشبي منتظم AB كتلته m ومعلق من طرفه A ٠ فاذا امسك في البداية بحيث يصنع زاوية ٤٥ مع الافق ثم ترك ليسقط ٠ عند سقوطه

الى الموضع الافقي يصطدم طرفه B بمسارة وكان التصادم غير مرن مطلقا بحيث سكن اللوح مباشرة بعد التصادم ٠ احسب الدفعين اللذين يكتسبهما الطرفان A و B ٠

٨ـ٢٦ ٠ حل المسألة السابقة على فرض ان التصادم في B كان تام المرونة ٠

٨ـ٢٧ ٠ قضيبان منتظمان AB و BC متساويا الكتلة m والطول ℓ ربطا في النقطة B بملاسة ٠ وكانت المنظومة في البداية في حالة سكون على سطح افقي املس ، بحيث وقعت النقاط A ، B ، C على خط مستقيم ٠ فاذا سلط الدفع $\vec{P}$ في النقطة A باتجاه عمودي على القضيب ، جد الحركة الابتدائية للمنظومة (ملاحظة ـ اعزل القضيبين) ٠

٨ـ٢٨ ٠ حل المسألة السابقة للحالة التي يكون فيها القضيبان في البداية متعامدين ٠

الفصل التاسع

حركة الجسم الصلد العامة

General Motion of a Rigid Body

في حركة الجسم الصلد المقيدة ، اما ليدور حول محور ثابت او يتحرك موازيا لمستو ثابت ، ففي الحالتين لا يتغير اتجاه محور الدوران ، اما في حالات حركة الجسم الصلد العامة فيتغير اتجاه محور الدوران ، فتكون الحالة هنا اكثر تعقيدا ، وفي الحقيقة لا تكون الحركة بسيطة حتى في الجسم الذى لا تؤثر عليه قوى خارجية .

٩ ـ ١) زخم الجسم الصلد الزاوى ، ضرب القصورات الذاتية

Angular Momentum of a Rigid Body. Products of Inertia

لما كان للزخم الزاوى اهمية كبيرة في دراسة داينامبك الاجسام الصلدة سنبدأ باستنباط العلاقة العامة للزخم الزاوى للجسم الصلد ، الزخم الزاوى $\vec{L}$ لاى منظومة من الجسيمات ، كما عرف في البند ٧ ـ ٢ ، هو المجموع الاتجاهي للزخوم الزاوية لجميع الجسيمات عندما تؤخذ منفردة ، اى

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_i \times m\vec{v}_i)$$

وسوف نركز اهتمامنا ، في هذا الفصل ، على الخواص الاتجاهية للزخم الزاوى وعلاقته بالمعادلة الاساسية للحركة الدورانية .

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

حيث $\vec{N}$ يمثل العزم المسلط ، وقد شرحت الظروف التي تصح فيها المعادلة السابقة في الفصل الثامن .

سنحسب اولا الزخم الزاوى لجسم صلد يدور حول نقطة ثابتة .

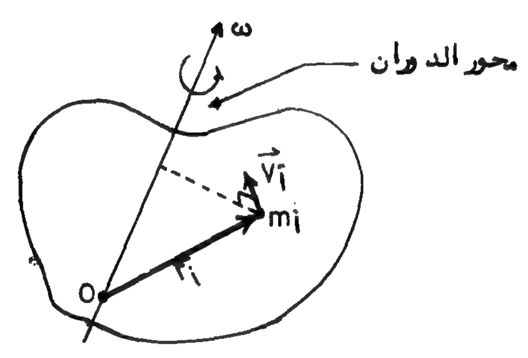
يمكننا في هذه الحالة تصور محاور مثبتة في الجسم تكون نقطة اصلها O في النقطة الثابتة (الشكل ٩ ــ ١) •

وبالرجوع الى البند (٥ ــ ٤) نعلم ان السرعة $\vec{v}_i$ لاى جسيم من مكونات الجسم يمكن التعبير عنها بالضرب الاتجاهي التالي

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

حيث $\vec{\omega}$ تمثل السرعة الزاوية للجسم الصلد و $\vec{r}_i$ متجه موضع الجسيم و وفقاً لذلك ، يكون الزخم الزاوى الكلي لجميع الجسيمات كما يلي

$$\vec{L} = \sum_i \left[m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \right] \qquad (٩ ــ ١)$$



الشكل (٩ ــ ١) : متجه سرعة جسيم نموذجي $\vec{v}_i$ في جسم صلد يدور حول محور معين معرف بمتجه السرعة الزاوية $\vec{\omega}$

الان ، مركبة ـ x للضرب الاتجاهي الثلاثي $\left[\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)\right]$ هي

$$\left[\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)\right]_x = \omega_x (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y x_i y_i - \omega_z x_i z_i \qquad (٩ ــ ٢)$$

و يمكن التحقق من صحتها بسهولة من فك محدد الضرب الاتجاهي (وعلى الطالب ان يعتبر هذا كتمرين) •

فمركبة x للزخم الزاوى تكون اذن

$$L_x = \sum m_i \left[\omega_x (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y x_i y_i - \omega_z x_i z_i \right]$$

$$= \omega_x \sum m_i(y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum m_i x_i y_i - \omega_z \sum m_i x_i z_i \quad (٩ - ٣)$$

وهناك علاقات مماثلة للمركبات L_y ، L_z .

لحساب الزخم الزاوى لجسم صلد ممتد ، نستبدل المجموع بتكامل على الحجم ، كالسابق . ولندخل الاختصارات التالية :

عزم القصور الذاتي حول المحور -x

$$I_{xx} = \sum (y_i^2 + z_i^2)m_i = \int (y^2 + z^2)dm$$

عزم القصور الذاتي حول المحور -y

$$I_{yy} = \sum (z_i^2 + x_i^2)m_i = \int (z^2 + x^2)dm$$

عزم القصور الذاتي حول المحور -z

$$I_{zz} = \sum (x_i^2 + y_i^2)m_i = \int (x^2 + y^2)dm$$

ضرب -xy للقصور الذاتي

$$I_{yx} = I_{xy} = -\sum x_i y_i m_i = -\int xy\ dm$$

ضرب -xz للقصور الذاتي

$$I_{zx} = I_{xz} = -\sum x_i z_i m_i = -\int xz\ dm$$

ضرب -zy للقصور الذاتي

$$I_{zy} = I_{yz} = -\sum z_i y_i m_i = -\int zy\ dm$$

سبق ان حسبنا عزوم القصورات الذاتية لعدد من الحالات البسيطة في الفصل السابق . ونحصل على ضرب القصورات الذاتية بطريقة حساب مماثلة . وباستخدام الرموز السابقة يمكننا التعبير عن الزخم الزاوى كالاتي :

$$\vec{L} = \hat{i}L_x + \hat{j}L_y + \hat{k}L_z$$

$$= \hat{i}(I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z) + \hat{j}(I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z)$$

$$+ \hat{k}(I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z) \qquad (٩ ـ ٤)$$

ويظهر ان متجه الزخم الزاوي $\vec{L}$ لا يكون دائما في نفس اتجاه محور الدوران او متجه السرعة الزاوية $\vec{\omega}$.

امثلـــــــة

١ـ جسم اعتباطي الشكل يدور حول المحور -z . جد الزخم الزاوي $\vec{L}$.

لما كان في هذه الحالة $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$ عندئذ نحصل على

$$\vec{L} = \hat{i}I_{xz}\omega + \hat{j}I_{yz}\omega + \hat{k}I_{zz}\omega$$

ولا سيما اذا كان كل من ضرب القصور الذاتي I_{xz} او I_{yz} لا يساوي صفرا • عندئذ توجد للزخم الزاوي $\vec{L}$ مركبة عمودية على ω ، لهذا لا يكون الزخم الزاوي في نفس اتجاه محور الدوران •

٢ـ قضيب رفيع طوله ℓ وكتلته m مقيد ليدور بسرعة زاوية ثابتة $\vec{\omega}$ حول محور يمر من المركز و يصنع زاوية α مع القضيب • جد $\vec{L}$ •

نختار محاور مثبتة في القضيب كما هو مبين في الشكل (٩ ـ ٢) • عندئذ نحصل على

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{m\ell^2}{12}$$

وجميع عزوم القصور الذاتية وضرب القصورات الذاتية الاخرى تساوي صفراً • ولما كان محور الدوران يقع في المستوى-yz فمركبات $\vec{\omega}$ تكون كما يلي

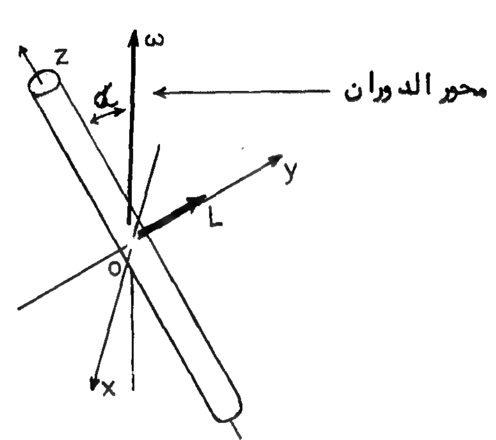
$$\omega_x = 0$$

$$\omega_y = \omega \sin \alpha$$

$$\omega_z = \omega \cos \alpha$$

فمتجه الزخم الزاوى يكون اذن

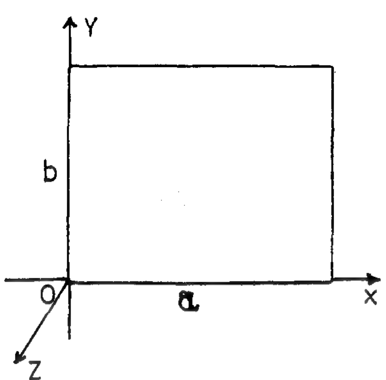
$$\vec{L} = \hat{j}\ \frac{m\ell^2}{12}\ \omega \sin\alpha$$



الشكل (٩ ــ ٢) • قضيب صلد مقيد الدوران حول محور مائل يمر من المركز •

اذن يبقى $\vec{L}$ باتجاه y ، كما هو مبين في الشكل ، ويدور مع الجسم حول $\vec{\omega}$ • (من السهل التحقق من ان $\vec{r} \times m\vec{v}$ لاى جزء من القضيب يكون على طول y) • وبصورة خاصة ، اذا كانت $\alpha = 90^\circ$ عندئذ $\vec{L}$ ، $\vec{\omega}$ يؤشران في نفس الاتجاه ، اى في اتجاه المحور -y .
وغير ذلك يكونان باتجاهين مختلفين •

٣ــ جد عزوم القصورات الذاتية وضرب القصورات الذاتية لصفيحة مستطيلة الشكل كتلتها m وضلعاها a,b لمحاور تقع نقطة اصلها على احد زوايا الصفيحة كما هو مبين في الشكل (٩ ــ ٣) •



الشكل (٩ ـ ٣) صفيحة مستطيلة الشكل

من نتائج الفصل السابق ، عندنا

$$I_{xx} = \frac{1}{3} mb^2$$

$$I_{yy} = \frac{1}{3} ma^2$$

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} = \frac{1}{3} m (a^2 + b^2)$$

المعادلة الاخيرة نتجت من نظرية المحاور المتعامدة ، ولما كان $z = 0$ لجميع نقاط الصفيحة ، فضربا القصورات الذاتية التي تحتوى على z يجب ان تتلاشى اى ان

$$I_{zx} = I_{yz} = 0$$

واخيرا ، نحصل على ضرب xy للقصور الذاتي من

$$I_{xy} = - \int xy \, dm = - \int_0^b \int_0^a xy \rho \, dx \, dy = - \rho \frac{a^2 b^2}{4}$$

حيث ρ تمثل كتلة وحدة المساحة • اضف الى ذلك ، لما كان

$$m = \rho ab$$

فنحصل على

$$I_{xy} = -\frac{1}{4} mab$$

لضرب xy للقصور الذاتي للصفيحة

الكمية المتدة للقصور الذاتي Inertia Tensor

نرى الان ان الخواص الدورانية للجسم الصلد حول نقطة تتطلب صفا set من تسع كميات هي I_{xx}, I_{xy} .... لاجل وصفها بصورة كاملة • وهناك امثلة اخرى كثيرة تتطلب صفوفا كهذه الكميات لوصف خاصية فيزيائية في نقطة وصفا كاملاً • ومثل هذه الصفوف تسمى بالكميات المتدة Tensors على ان تخضع لقوانين تحولات معينة لا نحاول بحثها هنا • والصف الذى عرف أعلاه يسمى بالكمية المتدة للقصور الذاتي للجسم • وقد بحث تمثيله بدلالة المصفوف في البند ٩ ــ ١٠ • فالقارئ الحسن الاطلاع في رموز المصفوف يستحسن ان يقرأ هذا البند الان •

٩ــ ٢) محاور الجسم الصلد الرئيسية Principal Axes of a Rigid Body

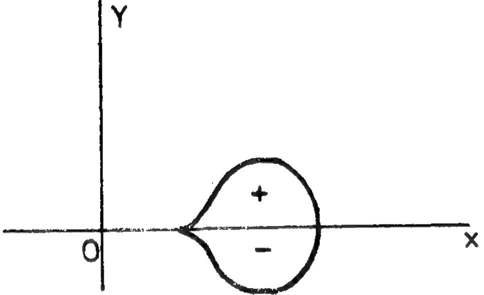
تبسط معادلات الجسم الصلد الرياضية كثيرا اذا استخدمت محاور بحيث تتلاشى جميع ضروب القصورات الذاتية • ويقال عن هذه المحاور بانها محاور الجسم الرئيسية في النقطة O نقطة اصل المحاور • وبصورة خاصة الزخم الزاوى يصبح

$$L = \hat{i}I_{xx}\omega_x + \hat{j}I_{yy}\omega_y + \hat{k}I_{zz}\omega_z \qquad (٩ ــ ٥)$$

عند استخدام المحاور الرئيسية • وفي هذه الحالة يقال عن عزوم القصورات الذاتية الثلاث بعزوم الجسم الرئيسية في النقطة O.

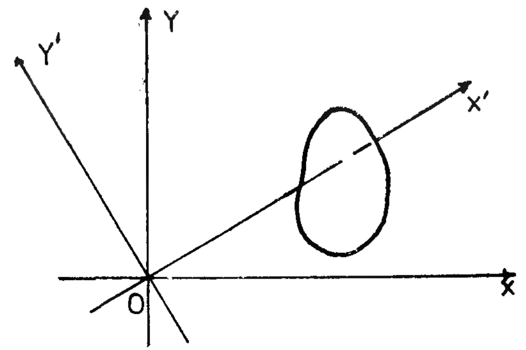
لنبحث مسالة ايجاد المحاور الرئيسية • اولا ، اذا كان في الجسم نوع من التناظر ، عندئذ بصورة اعتيادية يمكن اختيار محاور بالمعاينة

بحيث يكون كل ضرب قصور ذاتي متكونا من جزئين متساويين في المقدار ومتعاكسين في الاتجاه وبذلك يتلاشى • فمثلا جسم الصفيحة المستوية المتناظرة المبينة في الشكل (٩ ـ ٤) له محاور رئيسية في النقطة O وهي المحاور المبينة •



الشكل (٩ ـ ٤) صفيحة متناظرة موضوعة بحيث ضرب القصور الذاتي -xy يساوى صفرا

وعلى كل ليس من الضروري أن يكون الجسم متناظرا لكي يتلاشى ضرب القصورات الذاتية • فمثلا افرض صفيحة مستوية اعتباطية الشكل (الشكل ٩ ـ ٥) • فاذا كان المستوى ـ xy هو مستوى الصفيحة عندئذ $z = 0$ ويتلاشى كل من I_{xz} ، I_{yz} فبالنسبة لاية نقطة اصل معينة في مستوى الصفيحة ، من السهل البرهنة على تواجد محاور، وبصورة دائمية ، بحيث يتلاشى التكامل $\int xy\, dm$ • ولتوضيح هذا ،نلاحظ ان التكامل يغير اشارته عند دوران المحاور Oxy بزاوية 90° ،لان موضع الصفيحة يتغير من ربع الى الذي يليه كما مبين



الشكل (٩ـ٥) محاور دائرة

وفقا لذلك يجب ان يتلاشى التكامل لزاوية دورانية تقع بين الصفر و 90° . هذه الزاوية تعرّف محاوراً يتلاشى فيها ضرب القصورات الذاتية ، وهذه بالتعريف ، محاور رئيسية .

ويمكن ان نبرهن بطريقة مماثلة انه لاى جسم صلد تتواجد دائما محاور رئيسية في اية نقطة معينة . وسوف تشرح طريقة عامة في البند ٩ ــ ١٠ لايجاد المحاور الرئيسية .

افرض ان جسما يدور حول محور رئيسي مثل المحور z- . عندئذ $\omega_z = \omega$, $\omega_x = \omega_y = 0$ وعلاقة الزخم الزاوى تبسط الى حد واحد هو

$$\vec{L} = \hat{k} I_{zz} \omega$$

حيث السرعة الزاوية هي

$$\vec{\omega} = \hat{k} \omega$$

وفي هذه الحالة يكون متجه الزخم الزاوى موازيا لمتجه السرعة الزاوية او محور الدوران . اذن لدينا الحقيقة المهمة التالية : اما ان يكون $\vec{L}$ في نفس اتجاه محور الدوران او لا يكون ، ويعتمد ذلك على ما اذا كان محور الدوران محورا رئيسيا او ليس رئيسيا

التوازن الديناميكي Dynamic Balancing

هناك تطبيق للقاعدة السابقة في حالة جهاز دائر كدولاب الموازنة او المروحة ، يقع مركز الكتلة على محور الدوران اذا كان الجهاز متوازنا استاتيكيا . ولكي يتوازن داينامكيا يجب ان يكون محور الدوران محورا رئيسيا ايضا ، بحيث يقع متجه الزخم الزاوى $\vec{L}$ على طول المحور عند دوران الجسم . وبالعكس ، اذا لم يكن محور الدوران محورا رئيسيا فيغير متجه الزخم الزاوى اتجاهه ليرسم مخروطا عند دوران الجسم .

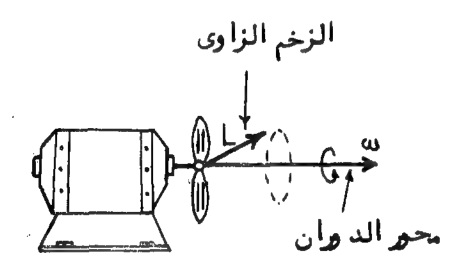
(الشكل ٩ ــ ٦) ولما كان $\frac{d\vec{L}}{dt}$ يساوى العزم المسلط فعندئذ يجب ان يكون هناك عزم يؤثر على الجسم واتجاهه يكون عموديا على المحور فينتج عنه رد فعل على الحوامل bearing's. اذن في حالة الدولاب

غير المتوازن ديناميكيا ، قد يكون هناك تذبذب عنيف ورجفة حتى لو كان الدولاب متوازناً استاتيكيا ٠

ايجاد المحاور الرئيسية عندما يكون احدهما معلوما

في حالات كثيرة قد يكون لجسم ما نوع من التناظر بحيث يمكن ايجاد محور رئيسيا واحد له على الاقل بالمعاينة ٠ فاذا كانت هذه الحالة فعندئذ يمكن ايجاد المحورين الرئيسيين الاخرين كما يلي :

افرض ان المحور z- معروف كمحور رئيسي في نقطة اصل محاور ملائمة ٠



الشكل (٩ ـ ٦) ٠ مروحة دائرة ٠ يرسم متجه الزخم الزاوى $\vec{L}$ مخروطا حول محور الدوران عندما تكون المروحة غير متوازنة ديناميكيا ٠

فمن التعريف

$$I_{zx} = I_{zy} = 0$$

اى ان المحورين الرئيسيين الاخرين يجب ان يقعا في المستوى xy- ٠ واذا كان الجسم يدور حول احد المحوريين الرئيسيين او الاخر ، يكون اتجاه متجه الزخم الزاوى في نفس اتجاه متجه السرعة الزاوية وبذلك يمكننا كتابة

$$I_p \vec{\omega} = \vec{L}$$

حيث I_p يمثل احد العزمين الرئيسيين للقصور الذاتي في السؤال ٠ ويمكن كتابة المعادلة السابقة بدلالة المركبات على النحو التالي :

$$I_p \omega_x = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y$$

$$I_p \omega_y = I_{xy} \omega_x + I_{yy} \omega_y \qquad (٩ - ٦)$$

ولنفرض ان θ تمثل الزاوية بين المحور -x والمحور الرئيسي الذى يدور حوله الجسم . عندئذ

$$\tan \theta = \omega_y / \omega_x$$

و

$$I_p = I_{xx} + I_{xy} \tan \theta$$

$$I_p \tan \theta = I_{xy} + I_{yy} \tan \theta$$

وعند حذف I_p من المعادلتين نحصل على

$$I_{xy}(\tan^2 \theta - 1) = (I_{yy} - I_{xx}) \tan \theta$$

ومنها يمكن ايجاد θ . في هذا التطبيق ، يستحسن استخدام المتطابقة المثلثية

$$\tan 2\theta = 2 \tan \theta / (1 - \tan^2 \theta)$$

والتي تعطي

$$\tan 2\theta = \frac{2 I_{xy}}{I_{xx} - I_{yy}} \qquad (٩ - ٧)$$

وهناك قيمتان للزاوية θ تقعان بين $\pi/2$ و $-\pi/2$ وهما تستوفيان المعادلة السابقة ، وهاتان القيمتان تعينان اتجاهي المحورين الرئيسيين في المستوى-xy .

مثال

جد اتجاهات المحاور الرئيسية في مستوى صفيحة متوازية الاضلاع طول ضلعيها b,a في ، زاوية .

من مثالنا السابق ، مثال (٣) بند ١ ــ ٩ نرى ان

$$\tan 2\theta = \frac{-2(mab/4)}{(mb^2/3)-(ma^2/3)} = \frac{3ab}{2(a^2 - b^2)}$$

او

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{3ab}{2(a^2 - b^2)} \right]$$

٩ ــ ٣ • الطاقــة الحركيــة الدورانيــة لجســم صلــد

Rotational Kinetic Energy of a Rigid Body

لنحســب الطاقــة الحركيــة لجسم صلــد يــدور حول نقطــة ثابتــة بســرعة زاويــة $\vec{\omega}$ • وكما في حســابنا للزخــم الزاوى ، نحصــل على الســرعة $\vec{v}_i$ لجسيم نموذجي i ، وهي

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

حيث $\vec{r}_i$ يمثل متجــه موضــع الجسيم بالنســبة الى النقطــة الثابتــة • اذن نحصــل على الطاقــة الحركيــة T من المجمــوع •

$$T = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \tfrac{1}{2} \sum_i \left[(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (m_i \vec{v}_i) \right] \qquad (٩ ــ ٨)$$

ويمكننا في الضرب العــددى الثلاثي استبدال علامــة الضرب العــددى (dot) بعلامــة الضرب الاتجاهي (cross)• (انظر البند ١ ــ ١٤) • اذن

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_i \left[\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) \right] = \tfrac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) \qquad (٩ ــ ٩)$$

ولكن $\sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$ يمثل من التعريف ، الزخم الزاوى $\vec{L}$ • لــــذلك يمكننا كتابــة

$$T = \tfrac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} \qquad (٩ ــ ١٠)$$

والمعادلــة الســابقة تعطي الطاقــة الحركيــة الدورانيــة لجسم صلــد بدلالة الســرعة الزاويــة $\vec{\omega}$ والزخم الزاوى $\vec{L}$• وهي نظــيرة المعادلــة

$T = \frac{1}{2}\vec{V}\cdot\vec{P}$ للطاقة الحركية الانتقالية لجسيم او منظومة
حيث $\vec{V}$ تمثل سرعة مركز الكتلة و $\vec{P}$ الزخم الخطي • والطاقة الحركية الكلية لحركة جسم الانتقالية والدورانية هي المجموع

$$\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L} + \frac{1}{2}\vec{V}\cdot\vec{P}$$

وبالتعبير عن الضرب العددى $\vec{\omega}\cdot\vec{L}$ بصورة واضحة بدلالة المركبات يمكننا كتابة

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L} = \frac{1}{2}(\omega_x L_x + \omega_y L_y + \omega_z L_z) \qquad (٩ - ١١)$$

للطاقة الحركية الدورانية • وبالاضافة الى ذلك ، يمكننا التعبير عن الزخم الزاوى بدلالة مركبات $\vec{\omega}$ وعزوم القصور الذاتي وضرب القصورات الذاتية للحصول على

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L} = \frac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 + 2I_{yz}\omega_y\omega_z + 2I_{zx}\omega_z\omega_x + 2I_{xy}\omega_x\omega_y) \qquad (٩ - ١٢)$$

للطاقة الحركية الدورانية • واذا استخدمنا المحاور الرئيسية ، تتلاشى الحدود التي تحتوى على ضرب القصورات الذاتية و نحصل على العلاقة البسيطة التالية :

$$T = \frac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2) \qquad (٩ - ١٣)$$

حيث I_{xx} ، I_{yy} ، I_{zz} هي العزوم الرئيسية للقصور الذاتي

مثال

جد الطاقة الحركية الدورانية لقضيب رفيع طوله l مقيد الدوران حول محور يمر من المركز ويصنع زاوية α مع القضيب ، كما في الشكل (٩ ــ ٢) •

باختيار المحاور المبينة ، تكون السرعة الزاوية

$$\vec{\omega} = \hat{j}\,\omega \sin\alpha + \hat{k}\,\omega \cos\alpha$$

و وفقا لذلك و لما كانت المحاور عبارة عن محاور رئيسية فيكون عندنا

$$\vec{L} = \hat{j}\,\frac{m\ell^2}{12}\,\omega \sin\alpha$$

عندئذ نحصل على

$$T = \tfrac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot\vec{L} = \frac{m\ell^2}{24}\,\omega^2 \sin^2\alpha$$

للطاقة الدورانية للقضيب

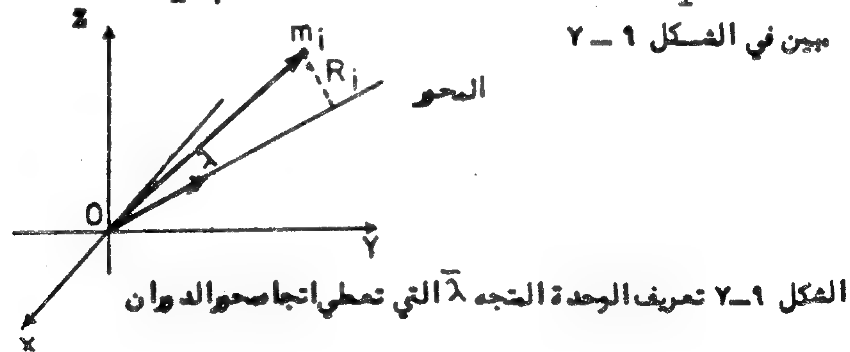
٩ ــ ٤) عزم القصور الذاتي لجسم صلد حول محور اعتباطي ، المجسم الناقص للعزم

Moment of Inertia of a Rigid Body about an Arbitrary Axis. The Momental Ellipsoid

لنستخدم التعريف الاساسي

$$I = \sum m_i R_i^2$$

لايجاد عزم القصور الذاتي لجسم صلد حول اى محور ، في العلاقة السابقة R_i يمثل المسافة العمودية بين الجسم m_i والمحور كما هو مبين في الشكل ٩ ــ ٧



الشكل ٩ــ٧ تعريف الوحدة المتجه $\vec{\lambda}$ التي تعطي اتجاه محور الدوران

لنفرض اننا مثلنا اتجاه محور الدوران بالوحدة المتجهة $\vec{\lambda}$. عندئذ

$$R_i = |\vec{r}_i \times \vec{\lambda}|$$

حيث

$$\vec{r}_i = \hat{i}x_i + \hat{j}y_i + \hat{k}z_i$$

يمثل متجه الموضع للجسيم i . وفضلا عن ذلك ، لنفرض ان $\cos\alpha$ ، $\cos\beta$ ، $\cos\gamma$ هي اتجاهات جيوب تمام المحور ، اي ان

$$\vec{\lambda} = \hat{i}\cos\alpha + \hat{j}\cos\beta + \hat{k}\cos\gamma$$

عندئذ نحصل

$$R_i^2 = |\vec{r}_i \times \vec{\lambda}|^2 = (y_i\cos\gamma - z_i\cos\beta)^2$$
$$+ (z_i\cos\alpha - x_i\cos\gamma) + (x_i\cos\beta - y_i\cos\alpha)^2$$

وعند ترتيب الحدود مرة اخرى ، نجد ان

$$R_i^2 = (y_i^2 + z_i^2)\cos^2\alpha + (z_i^2 + x_i^2)\cos^2\beta + (x_i^2 + y_i^2)\cos^2\gamma$$
$$- 2y_iz_i\cos\gamma\cos\beta - 2z_ix_i\cos\alpha\cos\gamma$$
$$- 2x_iy_i\cos\alpha\cos\beta$$

ويمكن التعبير عن عزم القصور الذاتي $I = \sum m_iR_i^2$ اذن كما يلي

$$I = I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma + 2I_{yz}\cos\gamma\cos\beta$$
$$+ 2I_{zx}\cos\alpha\cos\gamma + 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta \qquad (١٤_٩)$$

والعلاقة المذكورة اعلاه تعطي عزم القصور الذاتي لجسم صلد حول اي محور بدلالة اتجاهات جيوب التمام لذلك المحور والعزوم وضرب القصورات الذاتية للجسم في محاور اعتباطية تقع نقطة اصلها على المحور. فاذا كانت المحاور هي محاور رئيسية في نقطة الاصل ، عندئذ تتلاشى ضرب القصورات الذاتية وتختصر العلاقة الى علاقة بسيطة هي

$$I = I_{xx} \cos^2\alpha + I_{yy} \cos^2\beta + I_{zz} \cos^2\gamma \qquad (٩ - ١٥)$$

مثـــــــال

جـد عـزم القصـور الذاتي لصفيحـة مستطيلة الشـكل منتظمـة حول احـد اقطارهـا

(أ) (ب)

الشـكل (٩ ــ ٨) • صفيحـة مستطيلة الشـكل تدور حول القطـر •
(أ) نقطـة الاصل في المركـز (ب) نقطـة الاصـل في الزاويـة

اولا ــ لنختر نقطـة الاصـل في مركـز الصفيحـة و المحـاور كما هو مبين فـي الشـكل (٩ ــ ٨(أ)) • وواضـح من التناظر انها تمثل محاور رئيسـية • فـاذا كانت a و b هي اضـلاع الصفيحـة وكتلتها m • فعندئذ تكـون العـزوم الرئيسـية في المركز هي :

$$I_{xx} = \frac{1}{12} mb^2$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12} ma^2$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

واتجاهات جيوب تمام القطر وهي :

$$\cos \alpha = \frac{a}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos \beta = \frac{b}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos \gamma = 0$$

فاذا عوضت هذه القيم في المعادلة (٩ ــ ١٥) نحصل على

$$I = \frac{mb^2a^2}{12(a^2+b^2)} + \frac{ma^2b^2}{12(a^2+b^2)} = \frac{ma^2b^2}{6(a^2+b^2)}$$

وكطريقة ثانية ، افرضا اننا اخترنا المحاور على طول حافتي الصفيحة كما هو مبين في الشكل (٩ ــ ٨ (ب)) • هذه ليست محاور رئيسية ، ولكن سبق ان استنبطنا العلاقة للعزوم وضرب القصورات الذاتية في المثال ٣ البند (٩ــ١) • اتجاهات الجيوب تمام القطر هي نفسها كالسابق • اذن ــ باستخدام المعادلة (٩ ــ ١٤)

$$I = \frac{mb^2}{3}\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}\right) + \frac{ma^2}{3}\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}\right) - \frac{mab}{4}\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)$$

$$= \frac{ma^2b^2}{6(a^2 + b^2)}$$

والتي تتفق مع نتيجتنا السابقة •

(٩ ــ ٥) الجسم الناقص للعزم The Momental Ellipsoid

قد نحصل على تفسير هندسي مفيد جدا لعلاقة عزم القصور الذاتي العامة

بالطريقـــة التاليـــــة :

افرض محـــور د وران اعتباطي حول نقطـــة معينـــة O • لنعرف النقطـــة P على محـــور الــد وران بحيث تكون المســافة OP تســاوى عدديا مقلوب الجــــذر التربيعي لعزم القصــور الذاتي حول المحور •

$$OP = \frac{1}{\sqrt{I}}$$

الان لنفرض ان x, y, z هي احداثيات النقطـــة P ، ولنفــــــــرض ان α ، β ، γ هي اتجاهات زوايا المســتقيم OP • عندئذ نحصل على :

$$\cos\alpha = \frac{x}{OP} = x\sqrt{L}$$

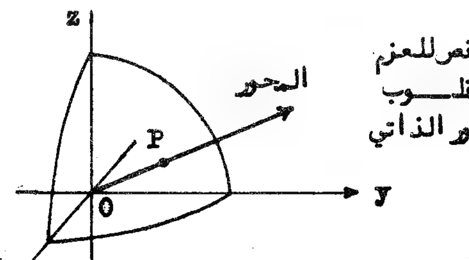
$$\cos\beta = \frac{y}{OP} = y\sqrt{L}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{OP} = z\sqrt{L}$$

فاذا عوضنـــا هـــذه القيم لاتجاهات جيــوب التمام في العلاقـــة العامـــة لعـــزم القصــور الذاتي في المعادلة (٩ ـ ١٤) ، نحصل على

$$x^2I_{xx} + y^2I_{yy} + z^2I_{zz} + 2yzI_{yz} + 2zxI_{zx} + 2xyI_{xy} = 1 \quad ...... \ (٩ ـ ١٦)$$

المعادلة الســابقة تمثل معادلة ســطح ، الشكل (٩ ـ ٩) • فهي تعرف المحل الهندســي للنقاط P عندما يتغير اتجــاه المحور OP. ولما كانت من الدرجـــة الثانيــة لذلك فهي تمثل المعادلة العامة لســطح ثلاثي الابعاد • ولما كان I



الشكل (٩ ـ ٩) • شحن مجسم ناقص للعزم المسافة OP تساوى الى مقلــــوب الجذر التربيعي لعزم القصور الذاتي حول المحور •

لا يمكن ان يساوى صفرا لاى جسم متمد ، فالسطح محدود • اذن يجب ان يكون مجسما ناقصاً ellipsoid (٢) • ويسمى بالمجسم الناقص للعزم لجسم في النقطة O.

اذا كانت المحاور هي محاور رئيسية ، فمعادلة المجسم الناقص للعزم تصبح

$$x^2 I_{xx} + y^2 I_{yy} + z^2 I_{zz} = 1 \qquad (١٢_٩)$$

اذن تتطابق المحاور الرئيسية للجسم مع المحاور الرئيسية للمجسم الناقص للعزم • ولما كان هناك دائما ما لا يقل عن ثلاثة محاور رئيسية لكل مجسم ناقص ، ينتج ان يتواجد دائما ما لا يقل عن ثلاثة محاور رئيسية لجسم في نقطة معينة •

اذا تساوى اثنان من العزوم الثلاثة الرئيسية فعندئذ يكون المجسم الناقص للقصور دورانيا • واذا كانت جميع العزوم للقصور متساوية في النقطة O ، فالمجسم الناقص للعزم يكون كرة وينتج عن ذلك ان عزم القصور هو نفسه لاى مستقيم يمر من O مهما كان اتجاهه

مثـــال

جد معادلة المجسم الناقص للعزم لصفيحة مستطيلة الشكل ضلعاها a ,b لمحاور نقطة اصلها في المركز •

من مثالنا السابق في البند (٩ ــ ٤) الذى وجدنا فيه عزم القصور

---

(٢) في حالة جسم مستقيم ورفيع ما لا نهاية ، فعزم القصور حول محور الجسم يساوى صفرا • ويتحول المجسم الناقص الى اسطوانة •

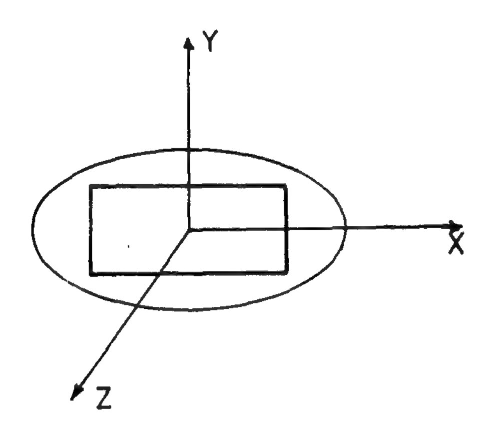
الذاتي ، نحصل مباشـرة على

$$x^2\left(\frac{mb^2}{12}\right) + y^2\left(\frac{ma^2}{12}\right) + z^2\left(\frac{ma^2 + mb^2}{12}\right) = 1$$

لمعادلة الجسـم الناقص للعزم . نلاحظ ان الاقطار الرئيسـية للجسـم الناقص هي بالنسـب التاليـة :

$$b^{-1} : a^{-1} : (a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}$$

فمثلا اذا كانت $a/b = 2$ فالنسـب هي $2 : 1 : 2/\sqrt{5}$.
اذا يقابل القطـر الطويـل للجسـم الناقص للعـزم محـور الصفيحـة الطويـل الجسـم موضح في الشكل (٩ ــ ١٠)



الشكل (٩ ــ ١٠) الجسم الناقص للعزم لمتوازي مستطيلات

٩ــ٦) معادلات اويلـر لحركـة الجسـم الصلـد .

Euler's Equations of Motion of a Rigid Body

افرض للمعادلة الاساسية التي تتحكم في دوران جسم صلد تحت تاثير العزم

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

فاذا كانت المحاور هي محاور رئيسية للجسم يمكن التعبير عن $\vec{L}$ بالعبارة البسيطة التالية

$$\vec{L} = \hat{i}I_{xx}\omega_x + \hat{j}I_{yy}\omega_y + \hat{k}I_{zz}\omega_z$$

حيث I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} تمثل عزوم القصور الذاتي الرئيسية للجسم في نقطة اصل المحاور . ولاجل ان تبقى الصيغة للزخم الزاوى الانفة الذكر صحيحة عند دوران الجسم ، يجب ان تدور المحاور ايضا مع الجسم . اى ان سرعة الجسم الزاوية هي نفسها للمحاور . (هناك استثناء . اذا كان اثنان من عزوم القصور الثلاثة الرئيسية متساويين بحيث يكون المجسم الناقص للعزم دورانيا ، فعندئذ لا حاجة ان تكون المحاور ثابتة في الجسم لكي تكون محاور رئيسية . وسوف ناخذ هذه الحالة بنظر الاعتبار في البند (٩ ــ ٨) .

وفقا لنظرية المحاور الدائرة التي استنبطت في الفصل الخامس ، يعطي معدل التغيير الزمني لمتجه الزخم الزاوى المنسوب للمحاور الدائرة عندئذ بالعلاقة التالية :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

اذن ، معادلة الحركة بالمحاور الدائرة هي :

$$\vec{N} = \dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L} \qquad (٩ ــ ١٨)$$

وتصبح المعادلة المذكورة اعلاه بدلالة المركبات الديكارتيه على النحو التالي :

$$N_x = \dot{L}_x + (\vec{\omega} \times \vec{L})_x$$
$$N_y = \dot{L}_y + (\vec{\omega} \times \vec{L})_y \qquad (٩_١٩)$$
$$N_z = \dot{L}_z + (\vec{\omega} \times \vec{L})_z$$

او بوضوح اكثر

$$N_x = I_{xx}\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z (I_{zz} - I_{yy})$$
$$N_y = I_{yy}\dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x (I_{xx} - I_{zz}) \qquad (٩_٢٠)$$
$$N_z = I_{zz}\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y (I_{yy} - I_{xx})$$

وتعرف هذه بمعادلات اويلر لحركة الجسم الصلد • وهي لها اهمية اساسية في نظرية دوران الاجسام الصلدة الممتدة •

جسم مقيد الدوران حول محور ثابت

Body Constrained to Rotate about a Fixed Axis

كتطبيق لمعادلات اويلر ، لنفرض الحالة الخاصة لجسم صلد قيد دورانه حول محور ثابت بسرعة زاوية ثابتة • عندئذ

$$\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0$$

وتبسط معادلات اويلر عندئذ الى

$$N_x = \omega_y\omega_z (I_{zz} - I_{yy})$$
$$N_y = \omega_z\omega_x (I_{xx} - I_{zz}) \qquad (٩_٢١)$$
$$N_z = \omega_x\omega_y (I_{yy} - I_{xx})$$

هذه تعطي مركبات العزم التي يؤثر بها المسند المقيد على الجسم •

وبصورة خاصة ، اذا كان محور الدوران محورا رئيسيا فعندئذ يكون اثنان

من مركبات $\vec{\omega}$ الثلاث يساويان صفرا . وتبعا لذلك تتلاشى جميع المركبات الثلاث للعزم $\vec{N}$. وهذا يتفق مع الشرح السابق الخاصة بالتوازن الديناميكي في البند (٩ ـ ٢) .

مثال

احسب العزم الذى يجب ان يسلط على قضيب رفيع لكي يدور بانطلاق زاوى ثابت ω حول محور يمر من المركز ويصنع زاويه α مع القضيب كما في المثال (٢) بند (٩ ـ ١) .

باستخدام نتائج المثال المشار اليه ، نجد ان معادلات اويلر تعطي مركبات العزم كالاتي :

$$N_x = \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha \left(-\frac{m\ell^2}{12}\right)$$

$$N_y = 0$$

$$N_z = 0$$

اذن يتلاشى العزم عندما يتلاشى الجيب او الجيب التمام ، اى عندما تكون α تساوى صفرا او 90° .

وفي الحالتين يدور القضيب حول محور اساسي .

٩ ـ ٧) الدوران الحر لجسم صلد عندما لا تؤثر عليه قوى الوصف الهندسي للحركة

Free Rotation of a Rigid Body Under no Forces.

Geometric Description of the Motion.

لنفرض حالة الجسم الصلد الذى يدور بحرية في اى اتجاه كان حول نقطة معينة مثل O. ولا توجد هناك عزوم تؤثر على الجسم . هذه الحالة للدوران الحر توضح مثلا بواسطة جسم يستند من مركز كتلته

على محور املس • ومثال آخر هو جسم صلد يتحرك بحرية ولا توثر عليه قوى او السقوط الحر في مجال جاذبية منتظم بحيث لا توجد عزوم النقطة O في هذه الحالة هي مركز الكتلة •

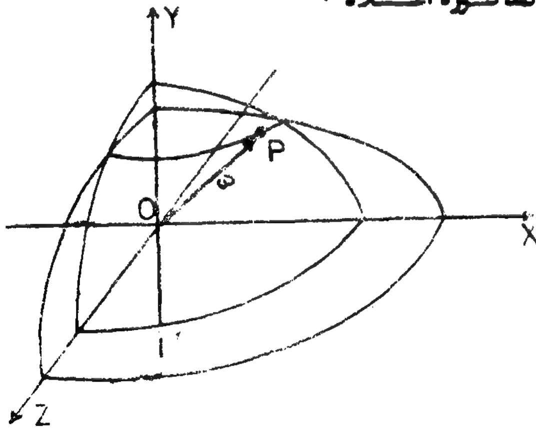
عندما يكون العزم صفرا ، فالزخم الزاوي للجسم ، كما يرى من الخارج يجب ان يبقى ثابتا في الاتجاه والمقدار وفقا لقانون حفظ الزخم الزاوي العام • ولكن بالنسبة لمحاور دائرة مثبتة في الجسم ، قد يتغير متجه الزخم الزاوي في الاتجاه ولو ان مقداره يجب ان يبقى ثابتا • ويمكن التعبير عن هذه الحقيقة بالمعادلة التالية

$$\vec{L} \cdot \vec{L} = \text{const.} \qquad (٩ - ٢٢)$$

وبدلالة المركبات المنسوبة الى المحاور الرئيسية للجسم تصبح المعادلة السابقة كالاتي :

$$I_{xx}^2 \omega_x^2 + I_{yy}^2 \omega_y^2 + I_{zz}^2 \omega_z^2 = L^2 = \text{constant} \qquad (٩ - ٢٣)$$

وعند دوران الجسم ، قد تتغير مركبات $\vec{\omega}$ ، ولكنها يجب ان تبقى دائما مستوفية للمعادلة المذكورة اعلاه •



الشكل (٩-١١) تقاء مجسمين الناقصين لجسم صلد يدور بحرية فيهما T, L ثابتتان •

و نحصل على علاقة ثابتة عند اخذ الطاقة الحركية للدوران بنظر الاعتبار . مرة اخرى ، لما كان العزم يساوى صفرا ، فالطاقة الحركية للدوران الكلية يجب ان تبقى ثابتة . هذه قد يعبر عنها كما يلي :

$$\vec{\omega}\cdot\vec{L} = 2T = \text{constant} \qquad (٩ - ٢٤)$$

او ما يكافىء ذلك بدلالة المركبات ، اى

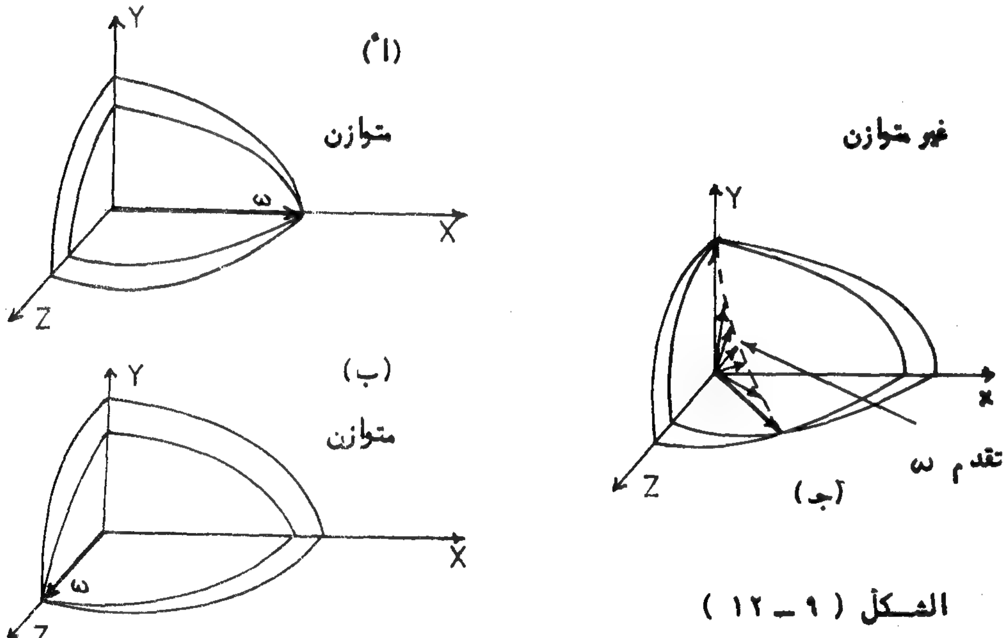
$$I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 = 2T = \text{constant} \qquad (٩ - ٢٥)$$

نرى الان ان مركبات $\vec{\omega}$ يجب ان تستوفي في آن واحد معادلتين مختلفتين تعبران عن ثبوت الطاقة الحركية ومقدار الزخم الزاوى ، المعادلتان (٩ ـ ٢٣) و (٩ ـ ٢٥) . هاتان هما معادلتا المجسمين الناقصين اللذين محاورهما الرئيسية تتطابق مع المحاور الرئيسية للجسم . المجسم الاول ، المعادلة (٩ـ٢٣) ، نسب اقطاره الرئيسية هي $I_{xx}^{-1} : I_{yy}^{-1} : I_{zz}^{-1}$ المجسم الثاني ، المعادلة (٩ ـ ٢٥) ، نسب اقطاره الرئيسية هي $I_{xx}^{-\frac{1}{2}} : I_{yy}^{-\frac{1}{2}} : I_{zz}^{-\frac{1}{2}}$

وهذا يعرف بمجسم بوانسوت الناقص Poinsot ellipsoid وهو مماثل للمجسم الناقص للعزم . عند دوران الجسم يرسم نهاية متجه السرعة الزاوية منحنيا هو تقاطع المجسمين الناقصين . وهذا موضح في الشكل (٩ـ١١) .

من معادلتي تقاطع المجسمين الناقصين ، المعادلتان (٩ ـ ٢٣) و (٩ ـ ٢٥) ، يمكن البرهنة في الحالة التي يتطابق فيها محور الدوران الابتدائي مع احد المحاور الرئيسية للجسم ، عندئذ يتقلص منحني التقاطع الى نقطة . وبعبارة اخرى يتلامس المجسمان الناقصان في قطر رئيسي ، ويدور الجسم بصورة مستقرة حول هذا المحور . ولكن هذا يكون صحيحا فقط عندما يكون الدوران الابتدائي حول المحور الذى عزم قصوره الذاتي

في نهايته العظمى او الصغرى ٠ واذا كان حول المحور المتوسط، كالمحور y- حيث $I_{xx} > I_{yy} > I_{zz}$ عندئذ تقاطع المجسمين لا يكون نقطة ، ولكنه منحن يدور كليا حولهما ، كما هو موضح في الشكل (٩ــ١٢) ٠ وفي هذه الحالة يكون الدوران قلقا لان محور الدوران يطوف حول الجسم ٠ ويمكن توضيح هذه الحقائق بسهولة وذلك بقذف قطعة مستطيلة اوكتاب في الهواء ٠

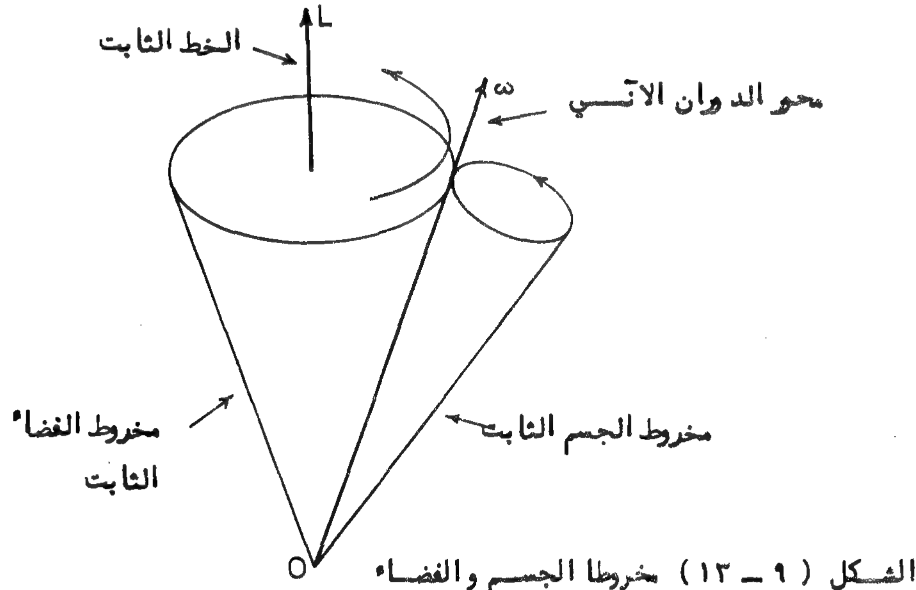


الشكل (٩ ــ ١٢)
مجسمان جسم صلد حر الدوران حول محور فيهما T,L ثوابت ٠ قصور العزم الذاتي في (أ) اصغر (ب) اعظم (جـ) متوسط

مخروطا الفضاء والجسم Body and Space Cones

يمكن وصف حركة متجه السرعة الزاوية المذكورة اعلاه بقولنا ان $\vec{\omega}$ ترسم مخروطا في المحاور الدائرة المثبتة في الجسم ٠ ويسمى هذا المخروط بمخروط الجسم الثابت Body-Fixed cone كذلك بالنسبة للمحاور المثبتة في

الفضاء ، السرعة الزاوية تطوف Processes حول متجه الزخم الزاوى الثابت $\vec{L}$. وكذلك يمكن وصف هذا الطواف بقولنا ان $\vec{\omega}$ ترسم مخروطا حول $\vec{L}$ • هذا المخروط يسمى بمخروط الفضاء الثابت Space-Fixed cone ويعين محور الدوران في اية لحظة من اتجاه $\vec{\omega}$ • فالحركة الحقيقية للجسم اذن تمثل بتدحرج مخروط الجسم على مخروط الفضاء • ويمثل خط التلامس الاني اتجاه $\vec{\omega}$ • وقد وضحت هذه الحالة في الشكل (٩ ـ ١٣) • وفي الحالة العامة يكون مقطعا مخروطي الفضاء والجسم قطعا ناقصا الا اذا كان للجسم محور تناظر ، فعندئذ يكونان مخروطين دائريين قائمين •



الشكل (٩ ـ ١٢) مخروطا الجسم والفضاء

٩ ـ ٨) الدوران الحر لجسم صلد له محور تناظر • المعالجة التحليلية

Free Rotation of a Rigid Body with an Axis of Symmetry. Analytical Treatment.

ولو ان الوصف الهندسي لحركة الجسم الصلد الذى اعطي في البند السابق يساعد على تصور الدوران الحر غير الخاضع لتاثير العزوم ولكن هذه الطريقة

لا تعطي قيم عددية بصورة مباشرة • وسنستمر الان لفهم هذا الوصف بالطرق التحليلية التي تعتمد على تكامل معادلات اويلر المباشر •

سوف نحل معادلات اويلر للحالة الخاصة التي يكون فيها للجسم محور تناظر • بحيث يتساوى اثنان من عزوم القصور الذاتي الثلاثة (في الحقيقة ان ذلك يتطلب ان يكون للمجسم الناقص للعزم محور تناظر و ليس للجسم نفسه) •

لنختر المحور z- كمحور للتناظر و لندخل الرموز التالية

$I_s = I_{zz}$ (عزم القصور الذاتي حول محور التناظر)

$I = I_{xx} = I_{yy}$ (العزم حول المحاور العمودية على محور التناظر)

للحالة التي يكون فيها العزم مساويا للصفر تصبح معادلات اويلر كما يلي :

$$I\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z (I_s - I) = 0$$
$$I\dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x (I - I_s) = 0 \qquad (٩ \text{ـ} ٢٦)$$
$$I_s\dot{\omega}_z = 0$$

وينتج من المعادلة الاخيرة ان

$$\omega_z = \text{constant} \qquad (٩ \text{ـ} ٢٧)$$

ولنعرّف الان الثابت Ω بالكمية

$$\Omega = \omega_z \frac{I_s - I}{I} \qquad (٩ \text{ـ} ٢٨)$$

عندئذ يمكن كتابة المعادلتين الاولى والثانية من (٩ـ٢٦) على النحو التالي

$$\dot{\omega}_x + \Omega\,\omega_y = 0 \qquad (٩ \text{ـ} ٢٩)$$

$$\dot{\omega}_y - \Omega\,\omega_x = 0 \qquad (٩ \text{ـ} ٣٠)$$

لفرز المتغيرات في المعادلتين المذكورتين اعلاه ، نفاضل الاولى بالنسبة للزمن t لنحصل على

$$\ddot{\omega}_x + \Omega \dot{\omega}_y = 0$$

وعند حلها للمتغير $\dot{\omega}_y$ وتعويض النتيجة في المعادلة (٩ـ ٣٠) نجد ان

$$\ddot{\omega}_x + \Omega^2 \omega_x = 0 \qquad (٩ - ٣١)$$

هذه هي معادلة الحركة التوافقية البسيطة ، وحلها هو

$$\omega_x = \omega_1 \cos (\Omega t) \qquad (٩ - ٣٢)$$

حيث ω_1 تمثل ثابت التكامل ، لكي نجد ω_y نفاضل المعادلة السابقة بالنسبة للزمن t ثم نعوض النتيجة في المعادلة (٩ ـ ٢٩) ، ويمكننا عندئذ حلها للمتغير ω_y للحصول على

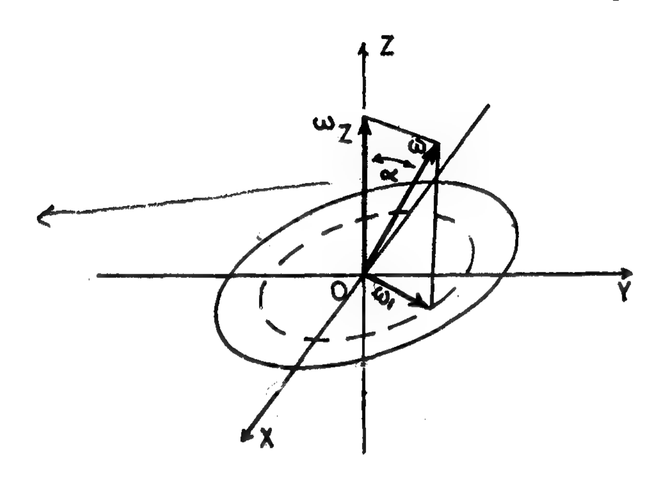
$$\omega_y = \omega_1 \sin (\Omega t) \qquad (٩ - ٣٣)$$

اذن ω_x و ω_y يتغيران توافقيا مع الزمن بتردد زاوي Ω ، ويختلفان في الطور بمقدار $\pi/2$ ، لذا يرسم مسقط $\vec{\omega}$ على المستوى -xy دائرة نصف قطرها ω_1 في التردد الزاوي Ω .

ويمكننا تلخيص النتائج السابقة كما يلي : في الدوران الحر لجسم صلد فيه محور تناظر ، يرسم متجه السرعة الزاوية حركة مخروطية (طواف) حول محور التناظر ، والتردد الزاوي لهذا الطواف هو الثابت Ω الذي عرف في المعادلة (٩ ـ ٢٨) ، لنفرض ان α تمثل الزاوية بين محور التناظر (المحور -z) ومحور الدوران (اتجاه $\vec{\omega}$) كما هو موضح في الشكل (٩ ـ ١٤) عندئذ يمكننا تمثيل Ω كما يلي

$$\Omega = \left(\frac{I_s}{I} - 1 \right) \omega \cos \alpha \qquad (٩ - ٣٤)$$

وهذا يعطي المعدل الزمني لطواف متجه السرعة الزاوية حول محور التناظر .



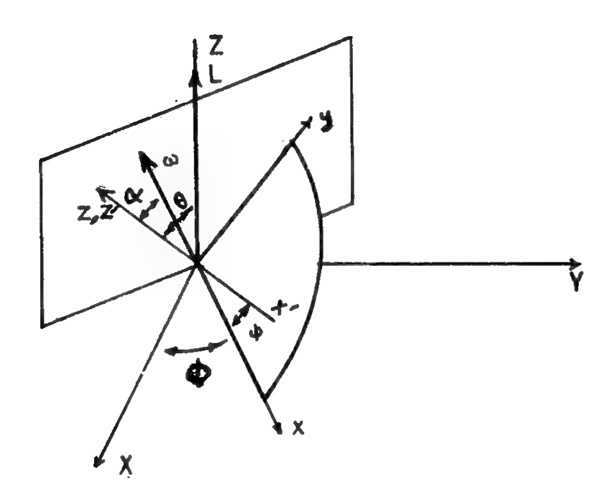
الشكل (٩ـ١٤) متجهات السرعة الزاوية لطواف حر لقرص

وصف دوران جسم صلد بالنسبة لمحاور ثابتة . زوايا اويلر .

في التحليل السابق لدوران جسم صلد حر كانت حركة الطواف منسوبة لمحاور مثبتة في الجسم وتدور معه . ولاجل وصف الحركة بالنسبة لمشاهد خارج الجسم يجب ان نستعمل محاور ثابتة . في الشكل (٩ـ١٥) للمحاور OXYZ توجيه ثابت في الفضاء . والمحاور Ox′y′z′ مثبتة في الجسم وتدور معه . وتعرف محاور ثالثة oxyz كما يلي :

ينطبق المحور- z على المحور -z′ او محور تناظر الجسم . والمحور - x هو خط تقاطع المستوى -XY مع المستوى - x′y′ .

وقد مثلت الزاوية بين المحور - X والمحور -x بالرمز ϕ والتي بين z,Z بالرمز θ ويحسب دوران الجسم حول محور التناظر



الشكل (٩ـ١٥) يوضح الشكل العلاقة بين زوايا اويلر وبين المحاور الثابتة والدائرة .

من الزاوية بين المحور - x والمحور -x´ والتي تمثل بالرمز ψ .
وتسمى الزوايا الثلاث ϕ, θ, ψ بزوايا اويلر .

وفي الحالة التي لا تؤثر فيها عزوم على الجسم ، يكون متجه الزخم الزاوى $\vec{L}$ ثابتا في المقدار والاتجاه بالنسبة للمحاور الثابتة OXYZ .
لنختر المحور - Z باتجاه $\vec{L}$ وهذا يعرف بالخط غير المتقلب invariable من الشكل نرى ان مركبات $\vec{L}$ في المحاور 0 xyz هي

$$L_x = 0$$

$$L_y = L \sin \theta \qquad (٩ـ٣٥)$$

$$L_z = L \cos \theta$$

مرة اخرى نقيد انفسنا في حالة الجسم الذى له محور تناظر (المحور - z) بحيث يكون المجسم الناقص للعزم الدوراني ، ووفقا لذلك تكون المحاور 0xyz محاور رئيسية كالمحاور 0x´y´z´ .

عندنا الان من اولى معادلات (٩ ــ ٣٥) ان $\omega_x = 0$. اذن تقع $\vec{\omega}$ في المستوى - yz . لنفرض ان α تمثل الزاوية بين المحور -z والسرعة الزاوية $\vec{\omega}$. فمركبات $\vec{\omega}$ عندئذ تكون

$$\omega_x = 0$$
$$\omega_y = \omega \sin \alpha \qquad (٩ - ٣٦)$$
$$\omega_z = \omega \cos \alpha$$

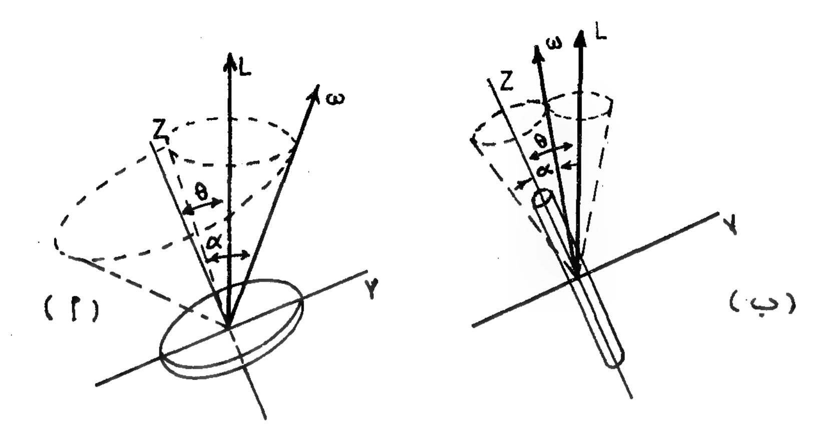
ووفقا لذلك

$$L_x = I_{xx}\omega_x = 0$$
$$L_y = I_{yy}\omega_y = I\,\omega \sin \alpha \qquad (٩ - ٣٧)$$
$$L_z = I_{zz}\omega_z = I_z\,\omega \cos \alpha$$

وبسهولة ينتج ان

$$\frac{L_y}{L_z} = \tan \theta = \frac{I}{I_s} \tan \alpha \qquad (٩ - ٣٨)$$

ووفقا للنتيجة الانفة الذكر تكون θ اصغر او اكبر من α ، ويعتمد ذلك على ما اذا كان I اصغر او اكبر من I_s على التوالي وبعبارة اخرى يقع متجه الزخم الزاوى بين محور التناظر ومحور الدوران في حالة الجسم المنبسط $(I < I_s)$ بينما في حالة الجسم الذى يستطيل $(I > I_s)$ يقع محور الدوران بين محور التناظر ومتجه الزخم الزاوى . لقد وضحت الحالتان في الشكل (٩ ــ ١٦) . في كل من الحالتين يرسم محور التناظر (المحور - z) عند دوران الجسم ، حركة مخروطية (طواف) حول متجه الزخم الزاوى الثابت $\vec{L}$. وفي الوقت نفسه يطوف محور الدوران (المتجه $\vec{\omega}$) حول $\vec{L}$ بنفس التردد .



الشكل (٩ ـ ١٦) الدوران الحر (أ) لقرص و (ب) لقضيب . وقد ظهر مخروطا الجسم والفضاء منقطة .

بالرجوع الى الشكل (٩ ـ ١٥) ، نرى ان الانطلاق الزاوى لدوران المستوى - yz - حول المحور -Z- يساوى المعدل الزمني لتغيير الزاوية ϕ . اذن $\dot{\phi}$ تمثل المعدل الزمني لطواف محور التناظر . (والمتجه $\vec{\omega}$) حول الخط غير المتقلب (المتجه $\vec{L}$) كما يرى من الخارج . وواضح من دراسة الشكل ان مركبات $\vec{\omega}$ هي

$$\omega_x = 0$$
$$\omega_y = \dot{\phi} \sin \theta \qquad (٩ \text{ ـ } ٣٩)$$
$$\omega_z = \dot{\phi} \cos \theta + \psi$$

ومن ثاني معادلة للمجموعة المذكورة اعلاه والمعادلة الثانية من المعادلات (٩ ـ ٣٣) نجد ان

$$\sin \alpha \qquad (٩ \text{ ـ } ٤٠)$$

ويمكن وضع المعادلة السابقة بصيغة مفيدة اكثر وذلك بالتعبير عن θ كدالة لـ α بواسطة المعادلة (٩ ــ ٣٨) • ونحصل بعد تبسيطها جبريا على

$$\dot{\phi} = \omega \left[1 + \left(\frac{I_s^2}{I^2} - 1\right)\cos^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (٩ ــ ٤١)$$

للمعدل الزمني لطواف محور التناظر حول الخط غير المتقلب •

امثلـــــــة

١ــ الطواف الحر للقرص Free Precession of a Disc

كمثال على النظرية السابقة ، لنفرض حالة قرص رقيق ، او اي جسم صفائحي متناظر من نظرية المحاور المتعامدة نحصل على

$$I_{xx} + I_{yy} = I_{zz}$$

ولما كان $I = I_{xx} = I_{yy}$ ، $I_s = I_{zz}$. اذن

$$2I = I_s$$

وبالتعويض في المعادلة (٩ ــ ٣١) نحصل على

$$\Omega = \left(\frac{2I}{I} - 1\right)\omega \cos\alpha = \omega \cos\alpha$$

للمعدل الزمني لطواف متجه السرعة الزاوية حول محور التناظر ،كما يرى في المحاور الدائرة المثبتة في القرص • اما اذا كان القرص سميكا فعندئذ I_s لا يساوى $2I$ ويختلف المعدل الزمني للطواف من العلاقة السابقة وذلك يعتمد على قيمة النسبة I/I_s .

المعدل الزمني لطواف محور التناظر حول المتجه $\vec{L}$ او المحور z- كما يرى من الخارج يعطى من المعادلة (٩ ــ ٤١) كما يلي :

$$\dot{\phi} = \omega \left(1 + 3 \cos^2 \alpha \right)^{\frac{1}{2}}$$

وبصورة خاصة اذا كانت α صغيرة جدا بحيث يكون $\cos \alpha \approx 1$ عندئذ نحصل على التقريب

$$\Omega \approx \omega$$
$$\dot{\phi} \simeq 2\omega$$

اذن يطوف محور التناظر في الفضاء تماما بمقدار ضعف الانطلاق الزاوى للدوران • ويظهر هذا الطواف كحركة ذبذبية •

٢ـ طواف الارض الحر Free Precession of the Earth

من المعروف في حركة الارض ان محور الدوران يميل قليلا عن القطب الجغرافي الذى يمثل محور التناظر • والزاوية α تساوى حوالي ٢ر٠ـ ثانية من القوس (كما هو مبين في الشكل ٩ ـ ١٧ المبالغ فيه) ـ كذلك من المعروف ان النسبة I_s/I تساوى حوالي ٠٠٣٢٧ر١ كما حسبت من تفلطح الارض • من المعادلة (٩ ـ ٣٤) نحصل اذن على

$$\Omega = 0.00327\ \omega$$

ولما كانت (يوم / $\omega = 2\pi$)، فان زمن ذبذبة الطواف الانف الذكر يحسب اذن كما يلي :

$$\frac{2\pi}{\Omega} = \frac{1}{0.00327} \text{ days} = 305 \text{ days}$$

وزمن الذبذبة الملاحظة لطواف محور دوران الارض حول القطب يساوى تقريبا ٤٤٠ يوم • ويعزى عدم التوافق بين القيم الملاحظة والمحسوبة الى كون الارض ليست تامة الصلادة •

وفي ما يتعلق بطواف محور تناظر الارض كما يرى من الفضاء ، فالمعادلة

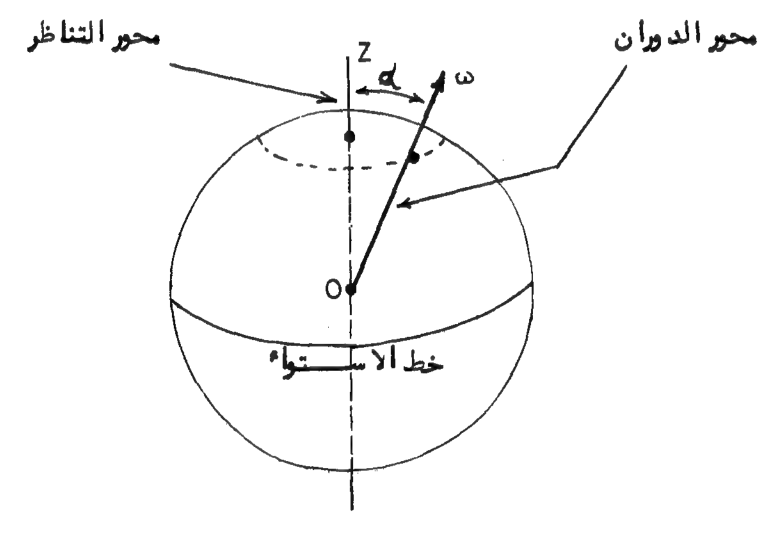
(٩ـ ٤١) تعطي

$$\dot{\phi} = 1.00327\,\omega$$

وزمن الذبذبة المرافق عندئذ يكون

$$\frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \frac{2\pi}{\omega}\,\frac{1}{1.00327} \simeq 0.997 \text{ day}$$

هذا الطواف الحر لمحور الارض في الفضاء يتداخل من الطواف الجيروسكوبي الاطول بكثير ،حوالي ٢٦٠٠٠ سنة ، والاخير ينتج من العزوم التي تؤثر بها الشمس والقمر على الارض (بسبب تفلطحها) . ان حقيقة كون زمن ذبذبة طواف الجيروسكوبي اطول بكثير من الطواف الحر يبرر اهمال العزوم الخارجية لحساب زمن ذبذبة الطواف الحر .



الشكل (٩ـ١٧) محاور التناظر ودوران الارض . الزاوية α المبالغ فيها كثيرا

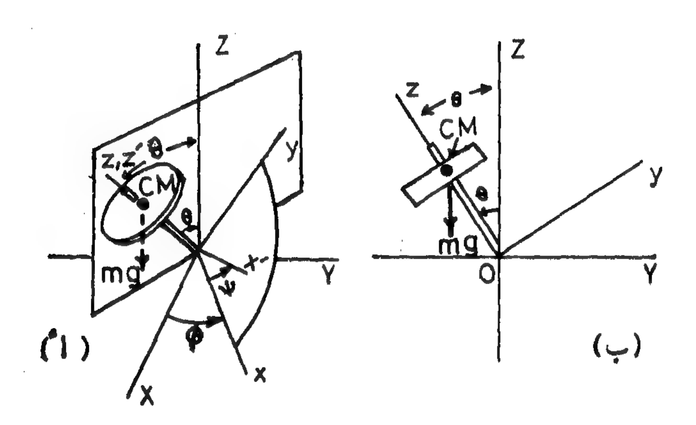
٩ ـ ٩) الطواف الجيروسكوبي ـ حركة الخذروف

Gyroscopic Precession. Motion of a Top.

سندرس في هذا البند حركة الجسم الصلد الذى يدور بحرية حول نقطة

ثابتة ويؤثر عليه عزم ، بدلا من حالة الطواف الحر الذى لا يؤثر عليه عزم • وتبسط الحالة بمثال الجايرسكوب البسيط (او الخذروف) •

الشكل (٩ ـ ١٨ آ) يبين رموز محاورنا ورسمت المحاور z, y, Z للتوضيح فقط في الشكل (٩ ـ ١٨ ب) حيث المحور x - عمودى على سطح الورقة • ونقطة الاصل O هي النقطة الثابتة التي يدور حولها الجسم •



الشكل (٩ ـ ١٨) الجايرسكوب البسيط

ان مقدار العزم حول O الناتج من الثقل هو $mg\ell \sin\theta$ حيث ℓ يمثل المسافة من O الى مركز الكتلة O • ويعمل هذا العزم حول المحور x - اى ان

$$N_x = mg\ell \sin\theta$$

$$N_y = 0 \qquad (٩ ـ ٤٢)$$

$$N_z = 0$$

ولنمثل السرعة الزاوية للمحاور $O\,x\,y\,z$ بالرمز $\vec{\omega}$. وواضح ان مركبات $\vec{\omega}$ بدلالة زوايا اويلر هي

$$\omega_x = \dot{\theta}$$
$$\omega_y = \dot{\phi} \sin \theta \qquad (٩ - ٤٣)$$
$$\omega_z = \dot{\phi} \cos \theta$$

اذن مركبات الزخم الزاوى للخذروف المدوم هي

$$L_x = I_{xx}\omega_x = I\,\dot{\theta}$$

$$L_y = I_{yy}\omega_y = I\,\dot{\phi} \sin \theta \qquad (٩ - ٤٤)$$

$$L_z = I_{zz}(\omega_z + \dot{\psi}) = I_s(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) = I_s S$$

هنا نستخدم نفس الرموز لعزوم القصورات الذاتية التي استخدمناها في البند السابق وقد اختصرنا في المعادلة الاخيرة الكمية $\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}$ بالحرف S والذى يسمى بالتدويم Spin .

معادلة الحركة الاساسية المنسوبة الى محاورنا الدائرة هي

$$\vec{N} = \dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

اذن ، بدلالة المركبات ، نحصل على معادلات الحركة التالية

$$mg\ell \sin \theta = I\ddot{\theta} + I_s S\,\dot{\phi} \sin \theta - I\dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta \qquad (٩ - ٤٥)$$

$$0 = I\frac{d}{dt}(\dot{\phi} \sin \theta) - I_s S\dot{\theta} + I\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta \qquad (٩ - ٤٦)$$

$$0 = I_s \dot{S} \qquad (٩ - ٤٧)$$

ان المعادلة الاخيرة تبين ان تدويم الجسم S ، حول محور التناظر يبقى ثابتا .

بالطبع تكون مركبات الزخم الزاوى على طول نفس المحور ثابتة ايضا .

$$L_z = I_s S = \text{constant} \qquad (٩ - ٤٨)$$

عندئذ المعادلة الثانية تكافيء

$$0 = \frac{d}{dt}(I \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_s S \cos \theta)$$

بحيث

$$I \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_s S \cos \theta = B = \text{constant} \qquad (٩ - ٤٩)$$

الطواف المستقر Steady Precession

وقبل ان نتابع تكامل بقية المعادلات ، سوف نشرح حالة خاصة ممتعة وهي الطواف المستقر . في هذه الحالة يرسم محور الجايرسكوب او الخذروف مخروطا دائريا قائما حول المحور الشاقولي (المحور - Z) في هذه الحالة $0 = \ddot{\theta} = \dot{\theta}$ ، وتبسط المعادلة (٩ - ٤٥) ، بعد اختصار العامل المشترك $\sin \theta$ الى

$$mg\ell = I_s S \dot{\phi} - I \dot{\phi}^2 \cos \theta$$

اوعند حلها للعامل S ، نجد ان

$$S = \frac{mg\ell}{I_s \dot{\phi}} + \frac{I}{I_s} \dot{\phi} \cos \theta \qquad (٩ - ٥٠)$$

كشرط للطواف المستقر . هنا $\dot{\phi}$ تمثل التردد الزاوى للطواف ، اى ان ، التردد الزاوى للحركة المتناظرة او محور التدويم حول الشاقول ، ولا سيما اذا كانت $\dot{\phi}$ صغيرة جدا ، عندئذ S تكون كبيرة . (هذه هي الحالة الاعتيادية لخذروف او جايرسكوب) . عندئذ قد يهمل الحد الثاني في يمين المعادلة (٩ - ٥٠) وقد نكتب على وجه التقريب

$$\dot{\phi} \simeq \frac{mg\ell}{I_s S} \qquad (٩ - ٥١)$$

وهذه النتيجة المألوفة في نظرية الجايرسكوب الاولية التي تعطيها معظم كتب الفيزياء العامة • وفي الواقع لما كانت المعادلة (٩ - ٥٠) هي من الدرجة الثانية في $\dot{\phi}$ فهناك قيمتان لـ $\dot{\phi}$ لقيمة معلومة لـ S ، ولكن قيمة التقريب المذكور اعلاه هو الذى يلاحظ اعتياديا •

معادلات الطاقة والترنح The Energy Equation and Nutation

اذا لم تكن هناك قوى احتكاكية تؤثر على الجايرسكوب لتبديد الطاقة فان الطاقة الكلية T + V تبقى ثابتة •

$$\tfrac{1}{2}(I\,\omega_x^2 + I\,\omega_y^2 + I_s S^2) + mg\ell\cos\theta = E$$

!وما يكافئها بدلالة زوايا ايلر

$$\tfrac{1}{2}(I\dot{\theta}^2 + I\dot{\phi}^2\sin^2\theta + I_s S^2) + mg\ell\cos\theta = E$$

يمكننا حل المعادلة (٩ - ٤٩) لـ $\dot{\phi}$ وتعويضها في المعادلة المذكورة اعلاه والنتيجة تكون

$$\tfrac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{(B - I_s S\cos\theta)^2}{2I\sin^2\theta} + \tfrac{1}{2}I_s S^2 + mg\ell\cos\theta = E \qquad (٩ - ٥٢)$$

والتي كليا بدلالة θ . هذه المعادلة تجيز لنا من حيث المبدأ ايجاد $\dot{\theta}$ كدالة للزمن t بطريقة التكامل • ولنعمل التعويض التالي :

$$u = \cos\theta$$

عندئذ $\dot{u} = -(\sin\theta)\dot{\theta} = -(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\dot{\theta}$ ونجد ان

$$\dot{u}^2 = (1-u^2)(2E - I_s S^2 - 2mg\ell u)I^{-1} - (B - I_s S u)^2 I^{-2}$$

او

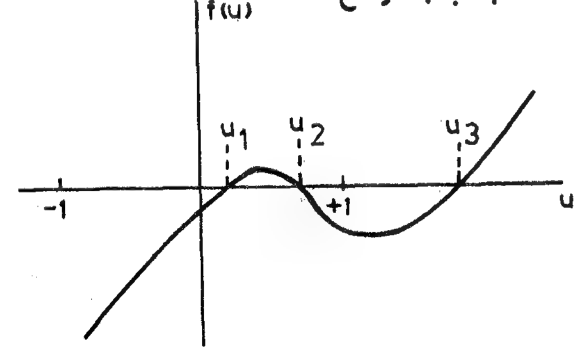
$$\dot{u}^2 = f(u)$$

لذا يمكن ايجاد u (ومنها θ) كدالة للزمن t بالتكامل

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{f(u)}} \qquad (٩ - ٥٣)$$

الان $f(u)$ هو متعدد الحدود Polynomial من الدرجة الثالثة ، اذن يمكن ايجاد قيمة التكامل بدلالة الدوال الاهليلجية elliptic functions

على اية حال ، لا نحتاج في الحقيقة الى اجراء التكامل لشرح الخواص العامة للحركة . ونرى ان $f(u)$ يجب ان يكون موجبا لكي يكون t حقيقيا . فغايات الحركة في θ تحسب اذن من جذور المعادلة $f(u)=0$. ولما كانت θ يجب ان تقع بين صفر و ٩٠ درجة ، عندئذ يجب ان تأخذ u القيم بين صفر و +١ . يمثل المنحني في الشكل (٩ - ١٩) الدالة $f(u)$ للحالة التي يكون فيها جذران متميزان هما u_1 و u_2 بين صفر و +١ ، عندئذ تكون قيم θ المناظرة لها اى θ_1 و θ_2 هي غايات الحركة الشاقولية ويتذبذب محور الخذروف الى الامام والخلف بين هاتين القيمتين للزاوية θ عند طواف الخذروف حول الشاقول الشكل (٩ - ٢٠) . ويسمى هذا التذبذب بالترنح Nutation اذا

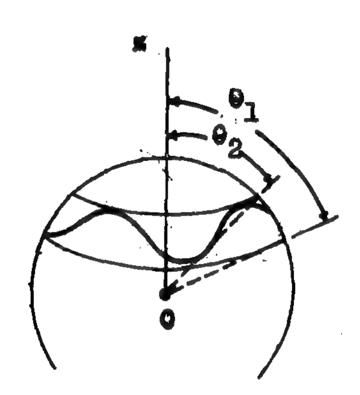


الشكل (٩-١٩) بياني الدالة $f(u)$.

كان هناك جذر مزدوج Double root اى اذا كانت $u_1 = u_2$ فعندئذ لا يحصل ترنح ويطوف الخذروف بصورة مستقرة . وفي الحقيقة يعطي شرط الجذر المزدوج من المعادلة (٩ ــ ٥٠) .

الخذروف النائم Sleeping Top

كل من لعب بالخذروف يعرف اذا بدأ بالموضع الشاقولي بسرعة تدويم



الشكل (٩ ــ ٢٠) توضيح لترنح الجايرسكوب البسيط

كافية فمحور الخذروف يبقى ثابتا في الاتجاه الشاقولي ، كشرط لما يسمى بالنائم Sleeping. وبدلالة التحليل السابق ، نرى ان النوم يجب ان يقابل جذر مزدوج في $u = +1$ في هذه الحالة ، لما كانت $\theta = \dot{\theta} = 0$ و $B = I_s S$ و $E = mgh + \frac{1}{2} I_s S^2$ فالمعادلة

$$f(u) = 0$$

عندئذ تصبح

$$(1 - u)^2 \left[\frac{2mgh}{I} (1 + u) - \frac{(I_s S)^2}{I^2}\right] = 0$$

في الحقيقة ، عندنا جذر مزدوج في $u = +1$. وعند وضع الحد الذى

بين القوسين في المعادلة السابقة مساويا للصفر نحصل على جذر ثالث هو u_3 . ونجد ان

$$u_3 = \frac{I_s^2 \, S^2}{2 \, I \, mg \, h} - 1$$

اذا كان الجذر u_3 لا يقابل قيمة فيزيائية ممكنة ل θ ، اى اذا كانت u_3 اكبر من واحد ، عندئذ ستكون الحركة النائمة مستقرة . وهذه تعطي

$$S^2 > \frac{4 \, Imgh}{I_s^2} \qquad (٩ _ ٥٤)$$

كمحك لاستقرار الخذروف النائم . فاذا تباطأ الخذروف بسبب الاحتكاك بحيث لا يبقى الشرط المذكور اعلاه صحيحا ، عندئذ يعاني الخذروف ترنحا واخيرا ينقلب

* ٩ _ ١٠) استخدام المصفوف في ديناميك الجسم الصلد

الكمية الممتدة للقصور الذاتي

Use of Matrices in Rigid Body Dynamics.

The Inertia Tensor

يمكن كتابة معادلات كثيرة من التي استنبطت في هذا الفصل ببساطة وبصورة ملائمة بصيغة المصفوف . فمثلا ، افرض التعبير العام للزخم الزاوى ، المعادلة (٩ _ ٤) هذه المعادلة بدلالة المصفوف تصبح

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \qquad (٩ _ ٥٥)$$

هنا ، كما عولجت تحويلات المحاور في البند (١ ـ ١٥) مثلت المتجهات بالمصفوفات العمودية • المصفوف ٣ × ٣ الذى يحتوى على العزوم وضرب القصورات الذاتية يتضمن الخواص الكاملة للجسم الصلد بالنسبة الى خواصه الدورانية • وهذا المصفوف هو طريقة خاصة لتمثيل الكمية المتدة للقصور الذاتي Inertia Tensor •

ولندخل الرمز المنفرد I للكمية المتدة للقصور الذاتي • عندئذ يمكن التعبير عن الزخم الزاوى كما يلي :

$$\vec{L} = \mathrm{I}\,\vec{\omega} \qquad (٩ ـ ٥٦)$$

مفهوم ان المتجهات $\vec{L}$ و $\vec{\omega}$ هي مصفوفات عمودية

الطاقة الحركية Kinetic Energy

يمكن البرهنة بسهولة على ان التعبير العام للطاقة الحركية الدورانية للجسم الصلد ، المعادلة (٩ ـ ١٢) ، يعطي بدلالة المصفوف على النحو التالي

$$T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z\end{bmatrix} \qquad (٩ ـ ٥٧)$$

او ، بصيغة مختصرة

$$T = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}^{T}\,\mathrm{I}\,\vec{\omega} \qquad (٩ ـ ٥٨)$$

هنا المصفوف الانقي $\vec{\omega}^{T}$ هو مصفوف التحويل Transpose matrix للمصفوف العمودى $\vec{\omega}$ و I هو الكمية المتدة للقصور الذى عُرّف سابقا •

المحاور الرئيسية Principal Axes

اذا كانت المحاور هي محاور رئيسية للجسم ، فان تمثيل الكمية المتدة لمصفوف القصور الذاتي ياخذ الصيغة القطرية diagonal التالية :

$$\overleftrightarrow{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \qquad (٩ ـ ٥٩)$$

ومن الواضح ، ان المسالة العامة لايجاد المحاور الرئيسية للجسم الصلد تكافوء المسالة الرياضية لتحويل المصفوف ٣×٣ الى مصفوف قطرى • ومعروف من نظرية المصفوفات ، ان اى مصفوف مربع متناظر يمكن تحويله الى مصفوف قطرى • في الحالة التي نحن بصددها $I_{xy} = I_{yx}$ وبالتماثل للازواج الاخرى • فالمصفوف اذن هو متناظر ، ولذلك يجب ان يتواجد صف من المحاور الرئيسية في اية نقطة •

ويتم تحويل المصفوف الى مصفوف قطرى بايجاد جذور معادلة المحدد التالية :

$$\left| \overleftrightarrow{I} - \lambda \overleftrightarrow{1} \right| = 0$$

حيث $\overleftrightarrow{1}$ يمثل مصفوف الوحدة unit matrix وتكتب هذه المعادلة بصورة واضحة على النحو التالي :

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - \lambda & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - \lambda & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (٩ ـ ٦٠)$$

وهذه من الدرجة الثالثة في λ ، اى

$$-\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0 \qquad (٩ ـ ٦١)$$

حيث C, B, A هي دوال بسيطة للـ I's • الجذور الثلاثة $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ هي عزوم القصورات الذاتية الرئيسية الثلاثة •

ولكي نجد ميلان المحاور الرئيسية ، نستخدم الحقيقة الفيزيائية وهي انه

عند دوران جسم حول احد محاوره الرئيسية يكون متجه الزخم الزاوى بنفس اتجاه متجه السرعة الزاوية • ولنفرض ان الاتجاهات الزاوية لاحد المحاور الرئيسية هي α ، β ، γ ولنفرض ان الجسم يدور بسرعة زاوية $\vec{\omega}$ حول هذا المحور فالزخم الزاوى عندئذ يكون

$$\vec{L} = \lambda \vec{\omega} = I \vec{\omega} \qquad (٩ _ ٦٢)$$

حيث λ تمثل احد الجذور الثلاثة λ_1 ، λ_2 او λ_3. وتكتب المعادلة السابقة بصورة واضحة على النحو التالي :

$$\begin{bmatrix} \lambda\omega\cos\alpha \\ \lambda\omega\cos\beta \\ \lambda\omega\cos\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega\cos\alpha \\ \omega\cos\beta \\ \omega\cos\gamma \end{bmatrix} \qquad (٩ _ ٦٣)$$

وهذه المعادلة ، تبعا لذلك ، تكافوء المعادلات العددية الثلاث التالية :

$$(I_{xx} - \lambda)\cos\alpha + I_{xy}\cos\beta + I_{xz}\cos\gamma = 0$$

$$I_{yz}\cos\alpha + (I_{yy} - \lambda)\cos\beta + I_{yz}\cos\gamma = 0 \qquad (٩ _ ٦٤)$$

$$I_{zx}\cos\alpha + I_{zy}\cos\beta + (I_{zz} - \lambda)\cos\gamma = 0$$

حيث اختزل العامل المشترك ω . لذلك يمكن ايجاد اتجاهات جيوب التمام للمحاور الرئيسية بحل المعادلات والجذور ليست حره ، من الواضح ، يجب ان تستوفي الشرط التالي :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (٩ _ ٦٥)$$

امثلة

١ــ جد الكمية الممتدة للقصور الذاتي لصفيحة مربعة طول ضلعها l وكتلتها m في المحاور $Oxyz$ حيث O في احدى زوايا الصفيحة

والمحـوران x و y على طـول ضلعـين منهـا ٠

باسـتخدام نواتـج المثـال ـ ٣ بنـد (٩ ـ ١) عندنا

$$I_{xx} = I_{yy} = m\ell^2/3 \,,\; I_{zz} = 2m\ell^2/3,\; I_{xy} = -m\ell^2/4,\; I_{xz} = I_{yz} = 0$$

اذن الكميـة الممتدة للقصـور الذاتي هي

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} m\ell^2/3 & -m\ell^2/4 & 0 \\ -m\ell^2/4 & m\ell^2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2m\ell^2/3 \end{bmatrix} = \frac{m\ell^2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

٢ـ جـد الزخـم الزاوى للصفيحـة المذكـورة اعلاه عندمـا تـدور حول احـد اقطارها ٠ في هذه الحالة يمكن التعبير عن متجـه السـرعة الزاويـة بالمصفوف العمودى التالي :

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega/\sqrt{2} \\ \omega/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

والزخم الزاوى ٠ وفقا لذلك هو

$$\vec{L} = \mathbf{I}\,\vec{\omega} = \frac{m\ell^2\omega}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{m\ell^2\omega}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{m\ell^2\omega}{12\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

٣ــ جد الطاقة الحركية للدوران في المسألة السابقة

بأستعمال النواتج السابقة ، عندنا

$$T = \tfrac{1}{2}\omega^T \vec{I}\omega = \tfrac{1}{2}\vec{\omega}^T \vec{L} = \frac{m\ell^2\omega^2}{24} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{m\ell^2\omega^2}{12}$$

٤ــ جد عزوم القصور الذاتي الرئيسية لصفيحة مربعة حول احدى زواياها

هنا المعادلة (٩ ــ ٦٠) تصبح

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}m\ell^2 - \lambda & -\frac{1}{4}m\ell^2 & 0 \\ -\frac{1}{4}m\ell^2 & \frac{1}{3}m\ell^2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}m\ell^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

او

$$\left[\left(\tfrac{1}{3}m\ell^2 - \lambda\right)^2 - \left(\tfrac{1}{4}m\ell^2\right)^2 \right] \left(\tfrac{2}{3}m\ell^2 - \lambda\right) = 0$$

العامل الثاني يعطي

$$\lambda = \tfrac{2}{3}m\ell^2$$

لاحد عزوم القصور الذاتي . العامل الاول يعطي

$$\tfrac{1}{3}m\ell^2 - \lambda = \pm\tfrac{1}{4}m\ell^2$$

أو

$$\lambda = \frac{7}{12} m \ell^2$$

و

$$\lambda = \frac{1}{12} m \ell^2$$

وقيم λ الثلاث هذه هي العزوم الرئيسية الثلاثة .

٥ ـ جد اتجاهات المحاور الرئيسية للمسالة المذكورة اعلاه

المعادلات (٩ ـ ٦٤) تعطي

$$\left(\tfrac{1}{3} m\ell^2 - \lambda\right) \cos\alpha - \tfrac{1}{4} m\ell^2 \cos\beta = 0$$

$$-\tfrac{1}{4} m\ell^2 \cos\alpha + \left(\tfrac{1}{3} m\ell^2 - \lambda\right) \cos\beta = 0$$

$$\left(\tfrac{2}{3} m\ell^2 - \lambda\right) \cos\gamma = 0$$

ومن المعادلة الاخيرة نرى ان $\gamma = 90^\circ$ هي احد الجذور . واذا وضعنا λ تساوى $\frac{1}{12} m\ell^2$ ، فان المعادلة الاولى تصبح

$$\cos\alpha - \cos\beta = 0$$

وهذه مع المعادلة (٩ ـ ٦٥) تعطي

$$2\cos^2\alpha = 1$$

او ، باخذ الجذر الموجب ، عندنا $\alpha = 45^\circ$ لمحور رئيسي واحد .
الاخر يعطي باخذ الجذر السالب ، اى ان $\alpha = 135^\circ$ اذن يكون احد المحاور الرئيسية على طول القطر ، والاخر عموديا على القطر وفي مستوى الصفيحة ، والمحور الرئيسي الثالث يكون عموديا على مستوى الصفيحة .

تمـــــارين

١ـ صفيحة مستطيلة الشكل منتظمة كتلتها m وضلعاها a و b تدور حول احد قطريها بانطلاق زاوى ω . جد مقدار واتجاه الزخم الزاوى حول زاوية محور الدوران .

٢ـ جد مقدار واتجاه الزخم الزاوى حول المركز في السؤال السابق

٣ـ قرص دائرى منتظم كتلته m ونصف قطره a مقيد الدوران بانطلاق زاوى ثابت ω حول محور يمر من المركز ويصنع زاوية ٤٥ مع محور القرص . جد اتجاه ومقدار الزخم الزاوى

٤ـ جد عزوم وضرب القصورات الذاتية لمتوازى مستطيلات منتظم اطوال اضلاعه a, b, c لمحاور نقطة اصلها في احدى الزوايا والمحاور على طول حافات متوازى المستطيلات . واذا كان متوازى المستطيلات يدور حول احد اقطاره ، جد الزخم الزاوى حول نقطة الاصل .

٥ـ حل السؤال السابق عندما تكون نقطة اصل المحاور في مركز متوازى المستطيلات والمحاور عمودية على اوجهه .

٦ـ جد عزوم وضرب القصورات الذاتية لصفيحة مثلثة منتظمة $A\,O\,B$ اذا كانت الزاوية في O تساوى 90° والاضلاع $OA=a$, $OB=b$ تقع على المحورين x-, y .

٧ـ جد المحاور الرئيسية للصفيحة في السؤال السابق

٨ـ جد معادلات المجسمات الناقصة للعزوم لما يلي : (أ) قرص دائرى منتظم نصف قطره a و (ب) اسطوانة دائرية قائمة صلدة نصف قطرها a وطولها b. استخدم محاور تقع نقطة اصلها في المركز لكل حالة .

٩ـ في الجزء (ب) للمسالة السابقة ، ما هي نسبة نصف القطر الى الطول لكي يكون المجسم الناقص للعزم كرة ؟

١٠ــ متوازى مستطيلات صلد منتظم ، اضلاعه a و $2a$ و $3a$. ما هي نسب الاقطار الرئيسية للمجسم الناقص للعزم في مركز متوازى المستطيلات ؟

١١ــ جد عزوم القصور الذاتي الرئيسية لكرة صلدة نصف قطرها a وفيها جوف كروى نصف قطره $a/2$ ومركزه في نقطة تبعد $a/4$ من مركز الكرة . (جد العزوم في مركز الكرة وفي مركز الكتلة)

١٢ــ جد الطاقة الحركية الدورانية في المسألتين (٩ ــ ١) و (٩ ــ ٣)

١٣ــ برهن على ان الطاقة الحركية للدوران كما اعطيت في المعادلة (٩ ــ١٢) تساوى $\frac{1}{2} I \omega^2$ وذلك باستخدام المعادلة (٩ــ١٤) والعلاقات

$$\omega_x = \omega \cos\alpha \ , \ \omega_y = \omega \cos\beta \ , \ \omega_z = \omega \cos\gamma$$

١٤ــ جد مقدار واتجاه العزم المسلط على الجسم من المحور الساند في التمرينين (٩ ــ ١) و (٩ ــ ٢)

١٥ــ صفيحة اعتباطية الشكل تدور بحرية تحت تاثير عزم يساوى صفرا . اثبت باستخدام معادلات اويلر ان المركبة ω_1 للسرعة الزاوية في مستوى الصفيحة (المستوى - xy) تكون ثابتة بالمقدار ، ولو ان مركبة z للسرعة الزاوية ω ليست من الضروري ان تكون ثابتة (تنبيه استخدم نظرية المحاور المتعامدة) . ما نوع الصفيحة التي تعطي $\omega_z=\text{constant}$

١٦ــ صفيحة مربعة طول ضلعها a تدور بحرية بدون تاثير عزم . اذا كان محور الدوران يصنع زاوية $45°$ مع محور تناظر الصفيحة . جد زمن ذبذبة طواف محور الدوران حول محور التناظر وزمن ذبذبة طواف محور التناظر حول الخط غير المتقلب للحالتين. (أ) صفيحة رقيقة و (ب) صفيحة سمكها $a/4$.

١٧ــ اشتق المعادلتين (٩ ــ ٢٣) و (٩ ــ٢٥) مباشرة من معادلات اويلر ، (تنبيه : ضع معادلات اويلر للحالة التي تكون فيها العزم يساوى صفرا ثم اضرب الاولى بـ ω_x والثانية بـ ω_y والثالثة بـ ω_z واجمع المعادلات الثلاث)

١٨ـ املاء الخطوات التي تؤدى الى استنباط المعادلة (٩ ـ ٤١) .

١٩ـ جسم صلد له محور تناظر ، يدور بحرية حول نقطة ثابتة بدون تاثير عزم . اذا كانت الزاوية بين محور التناظر و المحور الانى للدوران هي α . برهن على ان الزاوية بين محور الدوران و الخط غير المتقلب (متجه $\vec{L}$) هي :

$$\tan^{-1}\left[\frac{(I_s - I)\tan\alpha}{I_s + I\tan^2\alpha}\right]$$

حيث I_s (عزم القصور الذاتي حول محور التناظر) هو اكبر من I (عزم القصور الذاتى حول المحور العمودى على محور التناظر) اثبت ان هذه الزاوية لا يمكن ان تتعدى ($\tan^{-1}(8^{-\frac{1}{2}})$.

٢٠ـ جد الزاوية بين $\vec{\omega}$ و $\vec{L}$ للحالتين في تمرين (١٦)

٢١ـ جد نفس الزاوية للارض .

٢٢ـ جسم صلد يدور بحرية حول مركز كتلته . لا توجد هناك عزوم مؤثرة . اذا كانت جميع القصورات الذاتية الرئيسية الثلاثة مختلفة اثبت بواسطة معادلات اويلر ان دوران الجسم سوف يكون مستقرا حول المحور الذى له اعظم عزم قصور ذاتي او المحور الذى له اصغر عزم قصور ذاتي . اما اذا كان الدوران حول المحور المتوسط لعزم القصور الذاتي فدوران الجسم سوف لا يكون مستقرا (يمكن توضيح ذلك بقذف كتاب في الهواء بعد لفه بخيط مرن) .

٢٣ـ قرص فضائي دائرى الشكل ، رقيق نصف قطره a وكتلته m يدور في الفضاء بانطلاق زاوى ω حول محور تناظره . فاذا ضرب نيزك حافة القرص و اعطاه دفع $\hat{P}$ وكان اتجاه $\hat{P}$ موازيا لمحور القرص . جد محصلة حركة القرص .

٢٤ـ جسم صلد له محور تناظر و يدور بسرعة زاوية $\vec{\omega}$ في حركة ذات ابعاد ثلاثة حول مركز كتلته • حيث يسلط عليه عزما احتكاكيا $-c\vec{\omega}$ كالذي قد يحدث من سحب الهواء (أ) اثبت ان مركبة $\vec{\omega}$ باتجاه محور التناظر تتناقص اسيا exponentially مع الزمن (ب) اثبت ايضا ان الزاوية بين السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ و محور التناظر تتناقص بصورة مستمرة اذا كان عزم القصور الذاتي حول محور التناظر هو اعظم عزم رئيسي •

٢٥ـ جايروسكوب بسيط يتكون من قرص دائري ثقيل كتلته m ونصف قطره a مثبت في مركز قضيب رفيع كتلته m/2 وطوله a • اذا دوم الجايروسكوب بمعدل زمني معين S بحيث صنع محوره زاوية ٤٥° مع العمود • اثبت ان هناك قيمتين ممكنتين للمعدل الزمني للطواف $\dot{\phi}$ بحيث يطوف الجايروسكوب بصورة مستمرة بقيمة ثابتة لـ $\theta = 45^{\circ}$. جد قيمتين عدديتين لـ $\dot{\phi}$ عندما يكون S = 900 rpm , a=10 cm .

٢٦ـ اذا بدأ الجايروسكوب في التمرين السابق باطلاقه بزاوية $\theta_1 = 45^{\circ}$ و $\dot{\phi} = 0$ وبنفس التدويم بدلا من طوافه بصورة مستمرة بزاوية ثابتة θ . اكتب معادلة الطاقة وجد الغاية الاخرى لـ θ_2 التي يصنعها محور الجايروسكوب مع العمود عند ترنحه •

٢٧ـ دوم قلم رصاص بموضع عمودى • ما هو اسرع تدويم يجب ان تصله بالدوران بالدقيقة • لكي يبقى القلم في موضعه العمودى • افرض ان القلم عبارة عن قضيب منتظم طوله ٢٠ سم وقطره ٨ مم •

٢٨ـ اذا قيد محور تدويم الجايروسكوب بحيث يبقى في مستوافقي على سطح الارض • ولكنه حر يؤشر باى اتجاه في ذلك المستوى • اثبت ان دوران الارض ينتج عنه عزم يحاول ان يوجه الجايروسكوب باتجاه خط الشمال ـ الجنوب • وهذا هو اساس البوصلة الجيروسكوبية •

٢٩ ـ جد الكمية الممتدة للتصور الذاتي لمكعب صلد منتظم ضلعه a لمحاور نقطة اصلها (أ) في مركز المكعب (ب) في احد زوايا المكعب

٣٠ـ جد الكمية الممتدة للتصور الذاتي لمتوازى مستطيلات صلد منتظم اضلاعه a, 2a, 4a لمحاور نقطة اصلها في احدى الزوايا وعندما تكون المحاور على امتداد حواف متوازى المستطيلات .

٣١ـ استخدم طريقة الصفوف لايجاد الزخم الزاوى و الطاقة الحركية للمكعب في التمرين (٩ ـ ٢٩) ، عندما يدور المكعب حول القطر الطويل و المار في المركز . اعمل نفس الشئ في التمرين (٩ ـ ٣٠)

٣٢ـ جد اتجاهات المحاور الرئيسية للمكعب في التمرين (٩ ـ ٢٩) و(ب) المكعب في التمرين (٩ ـ ٣٠) .

الفصل العاشر

معادلات لاكرانج

Lagrange's Equations

سوف تضاف الان الى تطبيق قوانين نيوتن المباشر على حركة المنظومات البسيطة طريقة عامة اكثر متعة ـ لقد أكتشف عالم الرياضيات الفرنسي جوزيف لويس لاكرانج Joseph Louis Lagrange طريقة ممتازة و مفيدة لايجاد معادلات حركة جميع المنظومات الديناميكية ٠

١٠ ـ ١) الاحداثيات المعممة Generalized Coordinates

رأينا ان موضع الجسيم في الفضاء يمكن تعيينه تعينا كاملا بثلاث احداثيات ٠ وقد تكون هذه ، ديكارتيه ، كروية ، اسطوانية ، او في الحقيقة اية ثلاثة برمترات مختارة بصورة ملائمة ٠ ونحتاج الى احداثيان فقط اذا كان الجسيم مقيد الحركة في مستوى او سطح ثابت ٠ بينما اذا كان الجسيم يتحرك على خط مستقيم او منحني ثابت فعندئذ يكفي احداثي واحد ٠

في حالة منظومة متكونة من N من الجسيمات نحتاج بصورة عامة الى 3N من الاحداثيات لتعيين مواضع جميع الجسيمات في وقت واحد بصورة كاملة ـ الشكل العام configuration للمنظومة ٠ اما اذا فرضت قيود على المنظومة ، فنحتاج الى عدد من الاحداثيات اقل من 3N لتعيين الشكل العام للمنظومة ٠ فمثلا ، اذا كانت المنظومة عبارة عن جسم صلد فعندئذ نحتاج فقط الى موضع نقطة ملائمة تتخذ مرجعا في الجسم (مثلا مركز الكتلة) و ميلان الجسم في الفضاء لتعيين الشكل العام ونحتاج في هذه الحالة الى ستة احداثيات فقط = ثلاث للنقطة المرجعية و ثلاث اخرى (مثل زوايا اويلر) للميلان ٠

و يتطلب بصورة عامة اصغر عدد معين n لتعيين الشكل العام لمنظومة معينة ٠ و سوف نرمز لهذه الاحداثيات بالرموز

$$q_1, q_2, \ldots, q_n$$

والتي تسمى بالاحداثيات المعممة generalized coordinates. قد يكون الاحداثي q_k زاوية او مسافة . فاذا كان بالاضافة الى تعيين شكل المنظومة العام . بامكان اى احداثي ان يتغير بصورة مستقلة عن الاحداثيات الاخرى فعندئذ يقال عن المنظومة بانها هولونومك holonomic وفي هذه الحالة يساوى عدد الاحداثيات n عدد درجات الحرية degrees of freedom للمنظومة .

وفي منظومة ليست هولونومك . لا تتغير جميع الاحداثيات بصورة مستقلة عن بعضها البعض . اى ان عدد درجات الحرية تكون اقل من عدد الاحداثيات الاصغر اللازم لتعيين الشكل . وكمثال على منظومة ليست هولونومك الكرة المقيدة لتدحرج على مستو تام الخشونة . حيث يتطلب هنا خمسة احداثيات لتعيين الشكل العام اثنان منها لموضع مركز الكرة وثلاث لميلانها . ولكن لا يمكن ان تتغير جميع الاحداثيات بصورة مستقلة لانه . اذا تدحرجت الكرة فعلى الاقل يجب ان يتغير احداثيان . وفي بحثنا الحالي . سوف نعتبر فقط منظومات الهولونومك .

اذا كانت المنظومة متكونة من جسيم واحد . فيمكن كتابة الاحداثيات الديكارتيه كدوال للاحداثيات المعممة على النحو التالي :

درجة حرية واحدة ــ الحركة على منحن

$$x = x(q)$$

درجتا حرية ــ الحركة على سطح

$$\left.\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2) \\ y &= y(q_1, q_2) \end{aligned}\right\}$$

ثلاث درجات حرية . الحركة في الفضاء

$$\left.\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3) \\ y &= y(q_1, q_2, q_3) \\ z &= z(q_1, q_2, q_3) \end{aligned}\right\}$$

افرض ان الاحداثيات q's تتغير من القيم الابتدائية $(q_1, q_2 \dots\dots)$ الى القيم المجاورة $(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2)$. فالتغييرات التي تقابلها في الاحداثيات الديكارتيه هي كما يلي :

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots\dots$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots\dots$$

وهكذا المشتقات الجزئية $\partial x / \partial q_1$ وهلم جرا ، هي دوال للاحداثيات q's . وكمثال خاص ، افرض حركة جسيم في مستو لنختر المحاور القطبية

$$q_1 = r \qquad q_2 = \theta$$

عندئذ

$$x = x(r, \theta) = r \cos \theta$$

و

$$y = y(r, \theta) = r \sin \theta$$

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial r} \delta r + \frac{\partial x}{\partial \theta} \delta \theta = \cos \theta \, \delta r - r \sin \theta \, \delta \theta$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial r} \delta r + \frac{\partial y}{\partial \theta} \delta \theta = \sin \theta \, \delta r + r \cos \theta \, \delta \theta$$

تعطي التغييرات في x و y الناتجة عن تغييرات صغيرة في r و θ . افرض الان ان منظومة تتكون من عدد كبير من الجسيمات ، لنفرض ان هذه المنظومة لها n درجات حرية واحداثياتها المعممة

$q_1, q_2, \dots\dots\dots q_n$ عندئذ فهي تتغير من الشكل $q_1, q_2, \dots\dots q_n$

الى الشكل المجاور $(q_1 + \delta q_1, \ldots q_n + \delta q_n)$ فيتحرك الجسيم i من نقطة مثل (x_i, y_i, z_i) الى النقطة المجاورة

$$(x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i)$$

حيث

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$\delta y_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$\delta z_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

فالمشتقات الجزئية هي مرة اخرى دوال للاحداثيات q's سوف نتبنى الاصطلاح الذى يلزم الرمز i ليشير الى المحاور الديكارتيه والحرف k ليشير الى الاحداثيات المعممة • ونتبنى ايضا الرموز الملائمة والتي تلزم الرمز x_i ليشير الى اى المحاور الديكارتيه • اذن لمنظومة تتكون من N من الجسيمات i ستأخذ القيم من 1 الى 3N.

١٠ــ ٢) القوى المعممة Generalized Forces

اذا عانى جسيم ازاحة $\delta \vec{r}$ تحت تاثير قوة $\vec{F}$ نعلم ان الشغل δW المنجز من القوة عندئذ يكون

$$\delta W = \vec{F} . \delta \vec{r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z$$

وبدلالة رموزنا التي تبنيناها توا يكون الشغل

$$\delta W = \sum_{i} F_i \delta x_i \qquad \text{١٠ــ ١}$$

وواضح ان العلاقة المذكورة اعلاه لا تصح لجسيم واحد فقط ، وانما تصح كذلك لمنظومة متكونة من عدد كبير من الجسيمات ، لجسيم واحد تاخذ i القيم من واحد الى ثلاثة ، وتمتد i لـ N من الجسيمات من واحد الى $3N$ ٠

لنعبر الان عن الزيادة δx_i بدلالة المحاور المعممة ، عندئذ

$$\delta W = \sum_i \left(F_i \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k\right)$$

$$= \sum_i \left(\sum_k F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k\right)$$

وعند عكس ترتيب المجموع نحصل على

$$\delta W = \sum_k \left(\sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) \delta q_k$$

ويمكن كتابة هذه على النحو التالي :

$$\delta W = \sum_k Q_k \delta q_k \qquad (١٠ـ٢)$$

حيث

$$Q_k = \sum_i \left(F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) \qquad (١٠ـ٣)$$

الكمية Q_k المعرفة بالمعادلة المذكورة اعلاه تسمى بالقوة المعممة المرافقة للاحداثي q_k ، ولما كان لحاصل الضرب $Q_k \delta q_k$ وحدات الشغل عندئذ تكون وحدات Q_k وحدات قوة اذا كانت q_k تمثل مسافة ووحدات عزم اذا كانت q_k تمثل زاوية ٠

اعتياديا ، ليس من الضروري ، وغير عملي استخدام المعادلة (١٠ـ ٣) لحساب قيمة Q_k الحقيقية ، بدلا من ذلك يمكن ايجاد كل قوة معممة Q_k مباشرة من حقيقة كون $Q_k \, \delta q_k$ يمثل الشغل المنجز على المنظومة من القوى الخارجية عندما يتغير الاحداثي q_k بمقدار δq_k (تبقى بقية الاحداثيات المعممة ثابتة) • فمثلا ، اذا كانت المنظومة جسما صلدا ، فالشغل المنجز من القوى الخارجية عندما يدور الجسم خلال زاوية $\delta\theta$ حول محور معلوم هو $L_\theta \, \delta\theta$ حيث L_θ هو مقدار العزم الكلي لجميع القوى حول المحور • وفي هذه الحالة تكون L_θ هي القوى المعممة المرافقة للاحداثي θ .

القوى المعممة للمنظومات المحافظة

راينا في الفصل الرابع ان المركبات المتعامدة للقوة المؤثرة على جسيم في مجال قوة محافظ تعطي كالاتي

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

حيث V هي دالة طاقة الجهد • ووفقا لذلك تصبح علاقتنا للقوة المعممة كما يلي

$$Q_k = -\left(\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\,\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)$$

والتعبير بين القوسين هو المشتقة الجزئية للدالة V بالنسبة للاحداثي q_k • اذن

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (١٠ـ٤)$$

فمثلا اذا استخدمنا المحاور القطبية $q_1=r$ ، $q_2=\theta$ فعندئذ تصبح القوى المعممة $Q_r=-\partial V/\partial r$ ، $Q_\theta=-\partial V/\partial\theta$ اذا كانت V هي دالة لـ r فقط (قوة مركزية) فعندئذ $Q_\theta = 0$.

١٠ـ٣ معادلات لاكرانج Lagranges Equations

لكي نجد المعادلات التفاضلية للحركة بدلالة الاحداثيات المعممة يمكن ان نهتدي بالمعادلة

$$F_i = m_i \ddot{x}_i$$

ونحاول كتابتها مباشرة بدلالة الاحداثيات المعممة q's ولكن هناك طريقة اخرى تعتمد على فرضيات الطاقة يكون استخدامها اسهل سنحسب اولا الطاقة الحركية T بدلالة المحاور الديكارتيه ثم سنعبر عنها عندئذ كدالة للاحداثيات المعممة و مشتقاتها بالنسبة للزمن . اذن ، الطاقة الحركية T لمنظومة تتكون من N من الجسيمات والتى عبرنا عنها في السابق كما يلي

$$T = \sum_{i=1}^{N} \left[\tfrac{1}{2} m_i \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right)\right]$$

سوف تكتب ببساطة الان كما يلي :

$$T = \sum_{i=1}^{3N} \tfrac{1}{2} m_i \dot{x}_i^{\,2} \qquad (١٠_٥)$$

حيث الاحداثيات الديكارتية x_i هي دوال للاحداثيات المعممة q_k . وللتعميم سوف نشمل ايضا امكانية احتواء العلاقة الدالية بين x's و q's على الزمن t بوضوح . وهذه هي الحالة اذا كانت هناك مقيدات متحركة كجسيم مقيد ليتحرك على سطح ، هو نفسه ، يتحرك بطريقة ما . يمكننا كتابة

$$x_i = x_i\,(q_1, q_2, \ldots q_n,\ t)$$

اذن

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\,\dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \qquad (١٠_٦)$$

في المعادلة المذكورة اعلاه وكل ما يتبع ، ما لم نذكر العكس ، سوف نفرض ان مدى i هو 1,2,...,3N حيث تمثل N عدد الجسيمات في المنظومة ، ومدى k هو 1,2,3,......n حيث n هو عدد الاحداثيات المعممة (درجات الحرية) للمنظومة . ومن معاينة المعادلة السابقة

نرى ان بامكاننا اعتبار T كدالة للاحداثيات المعممة ، مشتقاتها بالنسبة للزمن ، وقد تكون دالة للزمن وواضح من علاقة $\dot{x}_i$ ان

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x}{\partial q_k} \qquad (١٠-٧)$$

لنضرب الان بـ $\dot{x}_i$ ونفاضل بالنسبة للزمن t. عندئذ نحصل على :ـ

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) = \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}$$

او

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \frac{\dot{x}_i^2}{2}\right) = \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\dot{x}_i^2}{2}\right)$$

تنتج الخطوة الاخيرة من امكانية عكس ترتيب التفاضل بالنسبة للزمن t و q_k او $\dot{q}_k$. ثم اذا ضربنا بـ m_i ووضعنا $m_i \ddot{x}_i = F_i$ يمكننا كتابة

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{m_i \dot{x}_i^2}{2}\right) = F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{m_i \dot{x}_i^2}{2}\right)$$

اذن باخذ المجموع على i نجد ان

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_i \left(F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_k} \qquad (١٠-٨)$$

واخيرا من تعريف القوة المعممة Q_k نحصل على النتيجة التالية :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} \qquad (١٠-٩)$$

هذه هي معادلات الحركة التفاضلية في الاحداثيات المعممة • وتسمى بمعادلات لاكرانج للحركة •

في الحالة التي تكون فيها الحركة محافظة بحيث $Q'=0$ تعطي من المعادلة (١٠ـ٤) • فعندئذ يمكن كتابة معادلات لاكرانج على النحو التالي :

(١٠ـ١٠)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

وتلطم المعادلات اكثر عند تعريف دالة مثل L تسمى بدالة لاكرانج بحيث

$$L = T - V$$

ومفهوم ان V, T هي دوال للاحداثيات المعممة • اذن • لما كانت $V = V(q)$ و $\partial V/\partial \dot{q} = 0$ نحصل على

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k}\,, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

عندئذ يمكن كتابة معادلات لاكرانج على النحو التالي

(١٠ـ١١)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

اذن يمكن استنباط المعادلات التفاضلية للحركة لمنظومة محافظة بسهولة اذا عرفنا دالة لاكرانج بدلالة محاور مناسبة •

اذا كان قسم من القوى المعممة غير محافظ ولنقل Q_k' والقسم الاخر يمكن اشتقاقه من دالة جهد مثل V فيمكننا كتابة

(١٠ـ١٢)

$$Q_k = Q_k' - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

عندئذ يمكننا ايضا تعريف دالة لاكرانج $L = T-V$ ونكتب المعادلات التفاضلية

للحركـة على الشـكل التالي :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = Q_k' + \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (١٠\text{–}١٣)$$

ان الصيغـة المذكورة اعلاه مناسبة للاستخدام ، مثلا عند تواجـد قـوى احتكاكيـة .

١٠ـ٤ بعـض تطبيقـات معادلات لاكرانـج

Some Applieations of Lagrange's Equations

سـوف نوضـح في هذا البنـد تعـدد اسـتخدامات معادلات لاكرانـج الجديرة بالملاحظـة و ذلك بتطبيقهـا على عـدد من الحالات الخاصة . و الطريقة العامـة لايجـاد المعادلات التفاضليـة لمنظومـة هي كما يلي :

١ـ اختـر محـاور مناسـبة لتمثيـل شـكل المنظومـة العام .

٢ـ جـد الطاقـة الحركيـة T كـدالة لهذه المحـاور و مشـتقاتها بالنسبة للزمن

٣ ـ اذا كانت المنظومـة محافظـة ، جـد الطاقـة الكامنـة V كدالة للاحداثيات او اذا كانت المنظومـة غير محافظـة ، جـد القوى المعممة Q_k.

٤ـ المعادلات التفاضليـة للحركـة يمكن ان تعطى عندئذ من المعادلات(١٠ـ٩) (١٠ـ١١)أو (١٠ـ١٣) .

المتذبذب التوافقي Harmonic Oscillator

خـذ بنظر الاعتبار حالة متذبذب توافقي ذو بعـد واحـد و افرض ان هنـاك قـوة تضـاؤل تتناسـب مع السـرعة . فالمنظومـة اذن غير محافظـة . اذا كانت x تمثل احداثي الازاحـة ،عندئذ تصبح دالـة لاكرانـج كالاتي :

$$L = T - V = \tfrac{1}{2} m\dot{x}^2 - \tfrac{1}{2} kx^2$$

حيث m تمثل الكتلـة و k برمتر المرونـه الاعتيادي .

اذن

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad , \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

ولتاجد قوة غير محافظة يمكن استخدام معادلات لاكرانج بصيغة المعادلة (١٠ ــ ١٢) • وهكذا فان $Q' = -c\dot{x}$ ومعادلة الحركة تصبح •

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -c\dot{x} + (-kx)$$

او

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

هذه معادلة المتذبذب التوافقي المتضائل المعروفة والتي درسناها سابقا •

جسيم منفرد في مجال مركزي

لنجد معادلات لاكرانج للحركة لجسيم يتحرك في مستو تحت تاثير قوة مركزية • سوف نختار الاحداثيات القطبية $q_1 = r$, $q_2 = \theta$. عندئذ

$$T = \tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$V = V(r)$$

$$L = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

المشتقات الجزئية المناسبة هي كما يلي :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + F_r$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

فمعادلات الحركة ، اى المعادلات (١٠ ــ ١١) ، هي اذن

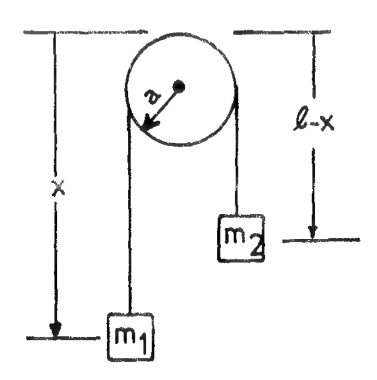
$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + F_r \qquad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

وهذه مماثلة للمعادلات التي استنبطناها في البند (٦ــ٧) لحركة جسيم

في مجـــــال مركـزي ٠

ماكـنة اتـود Atwood's Machine

منظومة ميكانيكيـة تسـمى بماكنـة اتـود تتكـون من ثقلـين كتلتيهمـــا m_1 و m_2 على التتالي ٠ وقد ربطتا بحبل خفيف غير قابل للمد و البســـط طولـه ℓ و يمـر على بكـرة (الشكل ١٠ ــ ١) ٠ للمنظومـة درجـة حريـــة واحـدة ٠ سـوف نفرض ان المتغـير x يمثـل شـكل المنظومـة العام ٠حيث x هي المسـافة العمودية من البكـرة الى الكتلـة m_1 كما هو مبين في الشـــكل



الشـكل ١٠ ــ ١ ماكنـة اتـود

و واضح ان الانطـلاق الزاوي للبكـرة هـو $\dot{x}/a$ حيث a يمثـل نصف القطـر اذن الطاقـة الحركيـة للمنظومـة هي

$$T = \frac{1}{2} m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2\dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \frac{\dot{x}^2}{a^2}$$

حيث I يمثـل عـزم القصـور الذاتي للبكـرة و تعطى الطاقـة الكامنة كما يلي

$$V = -m_1 gx - m_2 g (\ell - x)$$

اذا اهملنا الاحتكاك ، فدالة لاكرانج تكون كما يلي :

$$L = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2})\ \dot{x}^2 + g(m_1 - m_2)\ x + m_2 g \ell$$

ومن معادلة لاكرانج

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

نحصل على

$$(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2})\ \ddot{x} = g(m_1 - m_2)$$

او

$$\ddot{x} = g\,\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + I/a^2}$$

وهذا هو تعجيل المنظومة ، اذا كانت $m_1 > m_2$ نلاحظ ان m_1 تهبط بتعجيل ثابت ، بينما اذا كانت $m_1 < m_2$ عندئذ ترتفع m_2 بتعجيل ثابت ، والحد I/a^2 في المقام يبين تاثير القصور الذاتي للبكرة .

ماكنة اتود المزدوجة The Double Atwood Machine

انرض المنظومة المبينة في الشكل (١٠ ـ ٢) ، هنا استبدلنا احدى ثقلي ماكنة اتود البسيطة ببكرة اخرى تحمل ثقلين مربوطين بحبل اخر للمنظومة الان درجتان من درجات الحرية ، سوف نعين شكلها العام بالاحداثيين x و x' كما هو مبين في الشكل ، لنهمل كتلتي البكرتين في هذه الحالة للسهولة ، عندنا

$$T = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m_2(-\dot{x} + \dot{x}')^2 + \tfrac{1}{2}m_3(-\dot{x} - \dot{x}')^2$$

$$V = -m_1 g x - m_2 g(\ell - x + x') - m_3 g(\ell - x + \ell' - x')$$

حيث m_1 ، m_2 ، m_3 تمثل الكتل الثلاث و ℓ ، ℓ' تمثل طولي حبلي

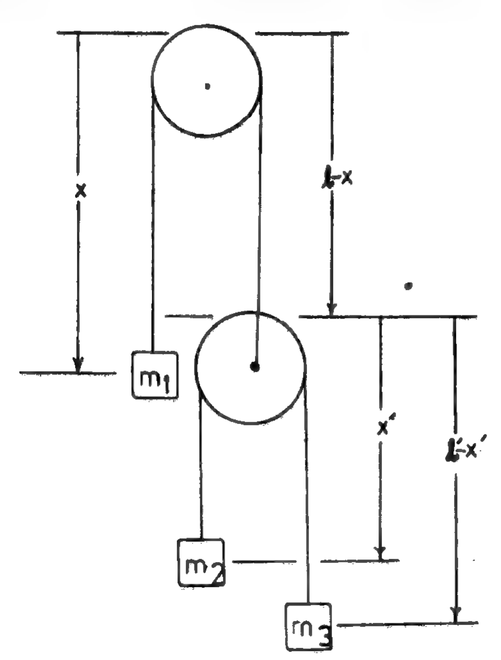
التوصيل • عندئذ

$$L = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2(-\dot{x} + \dot{x}')^2 + \tfrac{1}{2}m_3(\dot{x} + \dot{x}')^2 + g(m_1-m_2-m_3)x$$

$$+ g(m_2 - m_3)x' + \text{constant}$$

ومعادلات الحركة

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} = \frac{\partial L}{\partial x'}$$



الشكل (١٠ـ ٢) ماكينة اتود المركبة

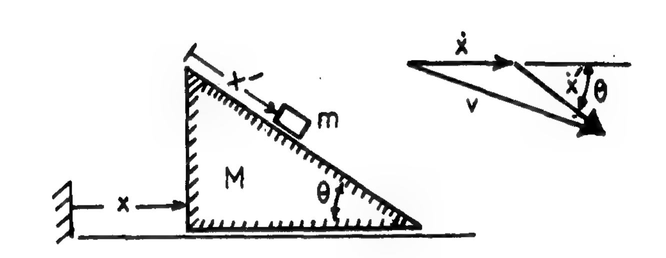
$$m_1\ddot{x} + m_2(\ddot{x} - \ddot{x}') + m_3(\ddot{x} + \ddot{x}') = g(m_1 - m_2 - m_3)$$

$$m_2(-\ddot{x} + \ddot{x}') + m_3(\ddot{x} + \ddot{x}') = g(m_2 - m_3)$$

ومنهما يمكن ايجاد التعجيلين $\ddot{x}$ و $\ddot{x}'$ بواسطة الجبر البسيط .

جسيم ينزلق على سطح مائل متحرك

لنفرض حالة جسيم ينزلق على سطح مائل املس الذى ينزلق بحرية على سطح افقي املس ، كما هو مبين في الشكل (١٠ ــ ٣) . في هذه المسالة هناك درجتان من درجات الحرية ، لذلك نحتاج الى احداثيين لتعيين



الشكل (١٠ ــ ٣) متوازى مستطيلات ينزلق اسفل سطح مائل متحرك .

الشكل العام تعيينا كاملا . سنختار الاحداثيين x و x' ، لازاحة السطح الافقية من نقطة مرجعية ، ولازاحة الجسيم من نقطة مرجعية على السطح المائل على التتالي ، كما هو مبين .

من دراسة مخطط السرعة ، المبين في يمين الشكل ، نرى ان مربع انطلاق الجسيم يعطى من قانون الجيب تمام .

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{x}'^2 + 2\dot{x}\dot{x}'\cos\theta$$

اذن الطاقة الحركية T للمنظومة هي كما يلي

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}M\dot{x}^2 = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{x}'^2 + 2\dot{x}\dot{x}'\cos\theta) + \tfrac{1}{2}M\dot{x}^2$$

حيث M تمثل كتلة السطح المائل ، و θ زاوية الاسفين كما هو مبين و m هي كتلة الجسيم . الطاقة الكامنة للمنظومة لا تحتوى على x لان المستوى يتحرك على سطح افقي . اذن يمكننا كتابة

$$V = -mgx'\sin\theta + \text{constant}$$

و

$$L = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{x}'^2 + 2\dot{x}\dot{x}'\cos\theta) + \tfrac{1}{2}M\dot{x}^2 + mgx'\sin\theta + \text{constant}$$

معادلات الحركـــــة

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} = \frac{\partial L}{\partial x'}$$

عندئذ تصبح

$$m(\ddot{x} + \ddot{x}'\cos\theta) + M\ddot{x} = 0$$

$$m(\ddot{x}' + \ddot{x}\cos\theta) = mg\sin\theta$$

عند حلهـا للتعجيلـين $\ddot{x}$ و $\ddot{x}'$ نجـد ان

$$\ddot{x} = \frac{-g\sin\theta\cos\theta}{\frac{m+M}{m} - \cos^2\theta} \qquad \ddot{x}' = \frac{g\sin\theta}{1 - \frac{m\cos^2\theta}{m+M}}$$

و يمكن الحصـول على النتيجـة المذكـورة اعـلاه من تحليل القوى و ردود فعـل المنظومـة ٠ و لكن هذه الطريقـة مضجـرة اكثر من طريقـة معادلات لاكرانج المذكورة اعـلاه ٠

اشـــتقاق معادلات اويلـر لجســم صلـد حـر الدوران

يمكن اســتخدام طريقـة لاكرانـج لاشـتقاق معادلات اويلر لحركـة جسـم صلـد ٠ في هذا البنـــد ســنفرض حالـة جسـم صلـد يـدور بدون تاثير عـزوم راينا ان الطاقـة الحركيـة لجسـم صلـد تعطي من

$$T = \tfrac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2)$$

حيث السـرع الزاويـة ω's منسـوبة الى محاور الجسـم الرئيسـية ٠ ولنعد الى الشـكل (٩ ــ ١٥) الذي يبين زوايا اويلـر θ ، ψ ، ϕ. من دراســة الشـكل نرى ان العلاقـة بين السـرع الزاوية ω's و زوايا اويلـر و مشـتقات ازمانهـــا هي كما يلي :ــ

$$\omega_x = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi$$

$$\omega_y = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \qquad (١٠ _ ١٤)$$

$$\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$$

وعند اعتبار زوايا اويلر كاحداثيات معممة تصبح معادلات الحركة كالاتي :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial T}{\partial \phi}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial T}{\partial \psi}$$

لان جميع القوى المعممة Q's تساوى صفرا . الان ، من قانون التسلسل

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial T}{\partial \omega_z} \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{\psi}} = I_{zz} \omega_z$$

اى ان

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = I_{zz} \dot{\omega}_z \qquad (١٠ _ ١٥)$$

وبالتماثل

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = I_{xx} \omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial \psi} + I_{yy} \omega_y \frac{\partial \omega_y}{\partial \psi}$$

$$= I_{xx} \omega_x (-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi)$$

$$+ I_{yy} \omega_y (-\dot{\theta} \cos \psi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi)$$

$$= I_{xx}\omega_x\omega_y - I_{yy}\omega_y\omega_x \qquad (١٠ـ١٦)$$

ومن المعادلتين (١٠ ــ ١٥) و (١٠ــ١٦) ، المعادلة ψ تصبح

$$I_{zz}\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y(I_{yy} - I_{xx}) = 0$$

والتي سبق ان رأينا (البند ٩ ــ ٦) بانها تمثل احدى معادلات اويلر لحركة جسم صلد بدون تأثير عزوم . ويمكن الحصول على المعادلتين الاخريين من التبديل الدوري للاحداثيات z, y, x ويكون هذا صحيحاً لاننا لم نعين اى محاور ديكارتيه خاصة كما يفضل .

١٠ ــ ٥) الزخوم المعممة . الاحداثيات المهملة

Generalized Momenta. Ignorable Coordinates

افرض حركة جسيم منفرد يتحرك على خط مستقيم (حركة خطية) فطاقته الحركية تكون

$$T = \tfrac{1}{2} m\dot{x}^2$$

حيث m تمثل كتلة الجسيم ، و x احداثي موضعه . والان بدلا من تعريف زخم الجسيم P بحاصل الضرب $m\dot{x}$ يمكننا تعريف P بالكمية $\partial T/\partial \dot{x}$ ، اى

$$P = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

في حالة منظومة توصف بالاحداثيات المعممة $q_1, q_2 \ldots q_k \ldots q_n$ الكميات P_k المعرفة بما يلي :

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad (١٠ـ١٧)$$

تسمى بالزخوم المعممة [1] . عندئذ يمكن كتابة معادلات لاكرنج للمنظومة المحافظة كما يلي

---

(١) اذا كانت دالة الطاقة الكامنة V لا تحتوى $\dot{q}$'s بشكل ظاهر ، عندئذ

$$P_k = \partial L/\partial \dot{q}_k = \partial T/\partial \dot{q}_k$$

$$\dot{P}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (١٠ - ١٨)$$

افرض وبصورة خاصة ان احد الاحداثيات مثل q_λ لا يحتويه L بشكل ظاهر . عندئذ

$$\dot{P}_\lambda = \frac{\partial L}{\partial q_\lambda} = 0 \qquad (١٠ - ١٩)$$

و

$$P_\lambda = \text{constant} = C_\lambda \qquad (١٠ - ٢٠)$$

في هذه الحالة يسمى q_λ بالاحداثي المهمل ignerable فالزخم المعمم المرافق للاحداثي المهمل اذن يكون ثابت حركة المنظومة .

فمثلا ، في مسالة الجسيم الذي ينزلق على سطح مائل (بحث في البند السابق) . راينا ان دالة لاكرانج L لا تحتوي على الاحداثي x ، موضع السطح . اذن يكون x احداثي مهمل في هذه الحالة .

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} + m\dot{x}' \cos\theta = \text{constant}$$

:

وفي الحقيقة يمكننا ان نرى ، ان P_x هو المركبة الافقية الكلية للزخم الخطي للمنظومة ، ولما كانت لا توثر قوة افقية خارجية على المنظومة ، فالمركبة الافقية للزخم الخطي يجب ان تكون ثابتة .

مثال اخر على الاحداثي المهمل يتواجد في حالة حركة جسيم في مجال مركزي . في الاحداثيات القطبية

$$L = \tfrac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

كما هو مبين في المثال في البند (١٠ - ٤) . في هذه الحالة تكون θ هي الاحداثي المهمل ، و

$$P_\theta = \frac{L}{\theta} = mr^2\,\theta = \text{constant}$$

هنا P_θ هو مقدار الزخم الزاوي .

* ١٠ ـ ٦) معادلات لاكرانج للقوى الدافعة

Lagrange's Equations for Impulsive Forces

افرض ان لدينا منظومة داينامكية موصوفة بالاحداثيات المعممة q_k فيها جميع القوى المعممة المسلطة Q_k تكون صفرا باستثناء فترة زمنية قصيرة τ . يمكننا تكامل معادلات لاكرانج كما يلي :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} + Q_k$$

$$\int_0^{\tau} d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) = \int_0^{\tau} \frac{\partial T}{\partial q_k}\, dt + \int_0^{\tau} Q_k\, dt$$

الان اذا كانت Q_k تقترب من اللانهاية بطريقة بحيث ان الدفع المعمم

$$\lim_{\tau \to 0} \int_0^{\tau} Q_k\, dt = \hat{p}_k \qquad (١٠ ـ ٢١)$$

يتواجد و يكون محدودا ، عندئذ التكامل $\int_0^{\tau}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k}\right)dt$ يقترب من الصفر لان الكمية $\partial T/\partial q_k$ تبقى محدودة . يمكننا اذن كتابة

$$\triangle\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) = \hat{p}_k$$

للتغيرات في الكميات $\partial T/\partial \dot{q}_k$ نتيجة تطبيق الدفع المعمم $\hat{p}_k$ على المنظومة للمنظومات التي لا تحتوي فيها دالة الجهد V على $\dot{q}$'s بشكل ظاهر بحيث $\partial T/\partial \dot{q}_k = \partial L/\partial \dot{q}_k = p_k$ ، يمكننا كتابة المعادلة (١٠ ـ ٢٢) كما يلي :

$$\triangle p_k = \hat{P}_k \qquad (١٠ ـ ٢٣)$$

حيث P_k هو الزخم المعمم المرافق للاحداثيات المعممة q_k ٠
يمكن ايجاد الدفوع المعممة $\hat{P}_k$ بكل بساطة من حساب الشغل الدفعي $\delta \hat{W}$ الذى يعطي من

$$\delta \hat{W} = \hat{\vec{P}}_a \cdot \delta \vec{s}_a + \dots = \hat{P}_1 \; \delta q_1 + \hat{P}_2 \; \delta q_2 + \dots$$

$$= \sum_k \hat{P}_k \; \delta q_k \qquad (١٠ _ ٢٤)$$

حيث $\hat{\vec{P}}_a$ ٠٠٠٠ هي الدفوع المسلطة و $\delta \vec{s}_a$ ٠٠٠٠ هي ازاحات اعتباطية صغيرة من خلالها تعمل القوى الدافعة المسلطة (خاضعة الى مقيدات المنظومة) ٠

مثال

قضيبان AB و BC طول كل منهما 2a وكتلته m وصلا بمفصل ناعم في B ووضعا على طاولة افقية ملساء بحيث تقع النقاط C,B,A على خط مستقيم ٠ جد الحركة مباشرة بعد ان سلط دفع $\hat{P}$ في النقطة A كما هو مبين في الشكل (١٠ _ ٤)

لنختر الاحداثيات المعممة θ_2, θ_1, y, x حيث x و y هي احداثيات موضع المفصل في B و θ_1 و θ_2 هما الزاويتان اللتان يصنعهما القضيبين مع الخط الابتدائي ABC على التتالي ٠ فالطاقة الحركية T للحركة الابتدائية تعطي من

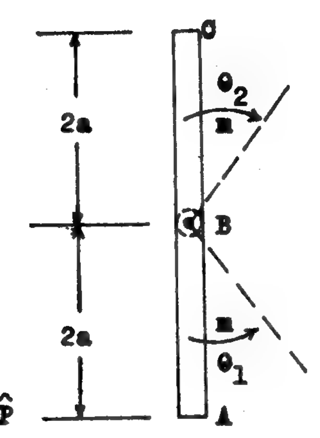
$$T = \tfrac{1}{2}m\,(\dot{x} + a\dot{\theta})^2 + \tfrac{1}{2}\,I_{cm}\;\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}m\,(\dot{x} + a\dot{\theta}_2)^2,$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,I_{cm}\;\dot{\theta}_2^2 + m\dot{y}^2$$

حيث I_{cm} يمثل عزم القصور الذاتي لأى من القضيبين حول مركز كتلته ٠
الان ، الشغل الدفعي يساوى $\hat{p}\,\delta s$ حيث

$$\delta s = \delta x + 2a\,\delta\theta_1$$

اذن

$$\delta\hat{W} = \hat{P}\,\delta s = \hat{P}\,(\delta x + 2a\,\delta\theta_1)$$



الشكل (١٠ـ ٤) دفع مسلط على احد طرفي قضيب متصل بقضيب آخر .

ولكن للازاحة العامة للمنظومة ، عندما

$$\delta\hat{W} = \hat{P}_x\,\delta x + \hat{P}_y\,\delta y + \hat{P}_{\theta_1}\,\delta\theta_1 + \hat{P}_{\theta_2}\,\delta\theta_2$$

اذن ، للحالة التي نحن بصددها

$$\hat{P}_x = \hat{P} \qquad \hat{P}_y = 0 \qquad \hat{P}_{\theta_1} = 2a\hat{P} \qquad \hat{P}_{\theta_2} = 0$$

ان الحركة الابتدائية للمنظومة تعطي من المعادلات (١٠ـ ٢٢) .

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \hat{P}_x : \quad m(\dot{x} + a\dot{\theta}_1) + m(\dot{x} + a\dot{\theta}_2) = \hat{P}$$

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = \hat{P}_\theta : \quad ma(\dot{x} + a\dot{\theta}_1) + I_{cm}\dot{\theta}_1 = 2a\hat{P}$$

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = \hat{P}_{\theta_2} : \quad ma(\dot{x} + a\dot{\theta}_2) + I_{cm}\dot{\theta}_2 = 0$$

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_2}\right) = \hat{P}_y \;:\; m\dot{y} = 0$$

وبتعويض $I_{cm} = \frac{1}{3} ma^2$ وبحلهـا للسـرع ، نحصل اخيرا على

$$\dot{x} = -\frac{\hat{P}}{m} \qquad \dot{y} = 0$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{9}{4}\frac{\hat{P}}{am} \qquad \dot{\theta}_2 = \frac{3}{4}\frac{\hat{P}}{am}$$

ويجب على القارئ ان يتحقـق من ان النتيجـة السابقة تعطي $\vec{v}_{cm} = \vec{\hat{P}}/m$ حيث $\vec{v}_{cm}$ هي سـرعة مركز كتلـة المنظومـة

(١٠ ـ ٧) قاعـدة التغيير لهملتن

Hamilton's Variational Principle

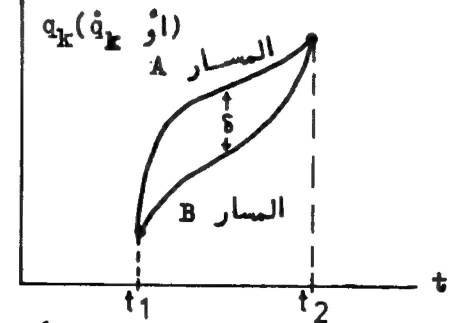
لحـد الان ، ارتكزت دراسـتنا في الميكانيك بصـورة واسـعة على قوانين نيوتـن للحركـة . وفي الحقيقـة ، في الجـزء الاول من هذا الفصل ، عندما اسـتنبطنا معـادلات لاكرانـج اسـتخدمنا قانون نيوتن الثاني في احـدى الخطوات :للمعادلة (١٠ ـ ٨) . وفي هذا البنـد سـوف نسـتقصي طريقـة إخرى لاستنباط معادلات لاكـرانج هذه الطريقـة تسـتند على فرضيـة اثبتت شـموليتها بنتائجهـا قاعـدة التغيير لهملتن

اعلنت هذه القاعدة في ١٨٣٤ من قبل رياضي اسـكتلندي يسـمى سـير ولـيم هملتن Sir William R. Hamilton وهي تنص على ان حركـة اي منظومـة تحدث بطريقـة بحيث ان التكامـل $\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ ياخذ دائمـا اعظـم او اصغر Extreme قيمـة ، حيث ان $L=T-V$ يمثـل دالـة لاكرانـج للمنظومـة . وبعبارة اخرى ، تنص قاعـدة هملتن على انـه

باستثناء جميع الطرق الممكنة التي يمكن ان تتغير فيها منظومة في فترة زمنية معينة t_2-t_1 فهناك حركة خاصة سوف تحدث ، التي يكون فيها التكامل المذكور اعلاه في نهايته العظمى او الصغرى • و يمكن التعبير عن هذا النص رياضيا بالصيغة التالية :

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0 \qquad (١٠ــ٢٥)$$

حيث δ تمثل تغييراً صغيراً • و ينتج هذا التغيير من اخذ الطرق المختلفة للتكامل بتغيير الاحداثيات المعممة و السرع المعممة كدوال للزمن t الشكل (١٠ــ٥)



الشكل (١٠ ــ ٥) • توضيح لتغيير q_k اوْ $\dot{q}_k$

و لكي نثبت ان معادلات لاكرانج للحركة تشتق مباشرة من المعادلة المذكورة اعلاه ، لنحسب التغيير بوضوح على فرض ان L تكون دالة معروفة للاحداثيات المعممة q_k و مشتقاتها الزمنية $\dot{q}_k$ • عندنا

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\,\delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\,\delta \dot{q}_k\right)dt$$

الان δq_k تساوى الفرق بين دالتين للزمن t و مختلفتين قليلا • اذن

$$\delta \dot{q}_k = \frac{d}{dt}\,\delta q_k$$

اذن ، عند تكامل الحد الاخير بطريقة التجزئة ، نجد ان

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\,\delta \dot{q}_k\,dt=\left[\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\,\delta q_k\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\sum_k \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\,\delta q_k d$$

ولكن لقيمتين ثابتتين للغايتين t_1 و t_2 يكون التغيير $\delta q_k=0$ في t_1 ، t_2

اذن يتلاشى الحد المتكامل وينتج عن ذلك ان

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sum_k\left[\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right]\delta q_k dt=0 \qquad (١٠-٢٦)$$

الان ، اذا كانت جميع الاحداثيات المعممة q_k مستقلة عندئذ تكون تغييراتها δq_k ايضا مستقلة . اذن يجب ان يتلاشى كل حد بين قوسين ، في التكامل لكي يتلاشى التكامل نفسه . اذن

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=0 \qquad (k=1,2,......n)$$

هذه هي تماما معادلات لاكرانج للحركة التي وجدناها في السابق .

فرضنا في الاشتقاق المذكور اعلاه تواجد دالة جهد اي ان المنظومة التي نحن بصددها تكون محافظة . يمكن جعل طريقة التغيير بحيث تتضمن المنظومات غير المحافظة وذلك باستبدال L في تكامل التغيير بالكمية $T+W$ حيث W هو الشغل المنجز من جميع القوى ، محافظة كانت أم غير محافظة . عندئذ تدخل القوة المعممة Q_k كما عرفت سابقا ، المعادلة (١٠-٢) ، ويقودنا نفس الاسلوب المذكور اعلاه الى الصيغة العامة لمعادلات لاكرانج ، المعادلة (١٠-٩) .

١٠ ــ ٨) دالــة هملتن ٠ معــادلات هملتــن

The Hamiltonian Function. Hamilton's Equations

افرض الدالــة التاليــة للاحداثيــات المعممــة

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L$$

فالطاقــة الحركيــة T لمنظومــات ديناميكيــة بســيطة هي دالــة متجانســة من الدرجــة الثانيــة في ال $q's$ والطاقــة الكامنــة V هي دالــة في ال $q's$ فقط ، بحيث ان $L = T(q_k \, , \, \dot{q}_k) - V(q_k)$

والان من نظريــة اويلــر للــدوال المتجانســة[٢] عندنا

$$\sum_k \dot{q}_k p_k = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T$$

اذن

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L = 2T - (T - V) = T + V \qquad (١٠ــ٢٧)$$

اى ان الدالــة H تســاوى الطاقــة الكلية من نــوع المنظومات التي فرضناهـــا

افرض اننا ناخــذ بنظر الاعتبار حلول المعادلات n التاليــة

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots . \, n)$$

ل $\dot{q}'s$ بدلالة ال $p's$ و $q's$ اى

$$\dot{q}_k = \dot{q}_k \, (p_k \, , \, q_k)$$

---

(٢) تنص نظريــة اويلر لدالة متجانســة f من درجة n في المتغييرات $x_1, x_2 \ldots . \, x_r$ اى ان

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \ldots + x_r \frac{\partial f}{\partial x_r} = nf$$

بهذه المعادلات يمكننا عندئذ ان نعـبر عن H كدالة لـ p's وال q's

$$H(p_k\ ,\ q_k) = \sum_k p_k\dot{q}_k\ (p_k\ ,\ q_k) - L \qquad (١٠ــ٢٨)$$

لنحسـب تغيير الدالـة H الذى يقابل تغيير q_k ، p_k عندنا

$$\delta H = \sum_k \left[p_k\ \delta\ \dot{q}_k + \dot{q}_k\ \delta\ p_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ \delta\ \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k}\ \delta\ q_k\right]$$

و يختصر في داخل القوسـين الحـد الاول مع الحـد الثالث لان $p_k = \partial L/\partial \dot{q}_k$ من التعريف • كـذلك ، لما كانت معـادلات لاكـرانـج يمكن كتابتهـا كالاتـــي : $\dot{p}_k = \partial L/\partial q_k$ فيمكنـا كتابـة

$$\delta H = \sum_k \left[\dot{q}_k\ \delta\ p_k - \dot{p}_k\ \delta\ q_k\right]$$

و الان التغير في H يجب ان يعطى من المعادلـة

$$\delta H = \sum_k \left[\frac{\partial H}{\partial p_k}\ \delta\ p_k + \frac{\partial H}{\partial q_k}\ \delta\ q_k\right]$$

و ينتـج من هـذا ان

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k$$

$$(١٠ــ٢٩)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k$$

هذه المعادلات تسمى بمعادلات هملتن القانونية للحركة

Hamilton's canonical equations of motion

و هي تتكـون من 2n من المعادلات التفاضليـة من الدرجـة الاولى ؛ بينمـــا تتكـون معـــادلات لاكـرانج من n من المعادلات من الدرجـة الثانية ، لقـــد اســتنبطنا معادلات هملتن للمنظومـات المحافظـة البسـيطة • و يمكن البرهنـــة

على ان المعادلات (١٠ ــ ٢٩) تصح ايضا للمنظومات الاكثر عمومية كالمنظومات غير المحافظة ، اى المنظومات التي تحتوى فيها دالة الطاقة الكامنة على ال $\dot{q}$'s وللمنظومات التى يحتوى فيها L على الزمن بوضوح ، ولكن ليس من الضرورى في هذه الحالات ان تكون الطاقة الكلية مساوية الى H .

وسوف يصادف الطالب معادلات هملتن عندما يدرس الميكانيك الكمي (النظرية الاساسية للظاهرة الذرية) وهناك تطبيقات ايضا لمعادلات هملتن في الميكانيك السماوى

امثلة

١ــ اشتق معادلات هملتن للحركة لمتذبذب توافقي احادى البعد ، عندنا

$$T = \tfrac{1}{2} m\dot{x}^2 \qquad V = \tfrac{1}{2} kx^2$$

$$P = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \dot{x} = \frac{P}{m}$$

اذن

$$H = T + V = \frac{1}{2m} P^2 + \tfrac{1}{2} k\, x^2$$

نمعادلات الحركة

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x} \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{P}$$

عندئذ تصبح

$$\frac{P}{m} = \dot{x} \qquad kx = -\dot{P}$$

المعادلة الاولى عبارة عن نص ثان للعلاقة بين السرعة والزخم في هذه الحالة . وعند استعمال المعادلة الاولى ، يمكن كتابة الثانية كما يلى :

$$kx = -\frac{d}{dt}(m\dot{x})$$

او عند اعادة ترتيب الحدود نحصل على

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

و هذه معادلة المتذبذب التوافقي المعروفة

٢ـ جد معادلات هملتن لحركة جسيم في مجال مركزي •

هنا عدنا

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$V = V(r)$$

بالاحداثيات القطبية • اذن

$$P_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad \dot{r} = \frac{P_r}{m}$$

$$P_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \qquad \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{mr^2}$$

و وفقا لذلك

$$H = \frac{1}{2m}\left(P_r^2 + \frac{P_\theta^2}{r^2}\right) + V(r)$$

معادلات هملتن

$$\frac{\partial H}{\partial P_r} = \dot{r}\ ,\ \frac{\partial H}{\partial r} = -\dot{P}_r\ ,\ \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \dot{\theta}\ ,\ \frac{\partial H}{\partial \theta} = -\dot{P}_\theta$$

عندئذ تصبح

$$\frac{P_r}{m} = \dot{r}$$

$$\frac{\partial V(r)}{\partial r} - \frac{P_\theta^2}{mr^3} = -\dot{P}_r$$

$$\frac{P_\theta}{mr^2} = \dot{\theta}$$

$$0 = -\dot{P}_\theta$$

تطهر المعادلتان الاخرتان ثبوت الزخم الزاوى اى

$$P_\theta = \text{constant} = mr^2\dot{\theta} = h$$

و منها المعادلتان الاوليتـان يعطيـان

$$m\ddot{r} = \dot{P}r = \frac{h^2}{mr^3} + F_r$$

لمعادلـة الحركـة القطبيـة ، حيث $F_r = -\partial V(r)/\partial r$

*١٠ـ ٩) ، معـادلات لاكـرانج للحركـة المقيـدة

Lagrange's Equations of Motion with Constraints

من المناسـب في بعض الاحيـان التعبير عن المعادلات التفاضليـة للحركة لمنظومة مقيـدة بدلالـة عـدد من الاحداثيـات اكثر من الحاجـة الحقيقيـة ، عندئذ يجب ان تكـون المعادلات التفاضليـة منسجمة compatible ايضا مـع المعادلـة او معـادلات ، المقيـد الذى قد يكـون بصيغـة معادلات شـرطية من النـوع

$$g(q_1, q_2, \ldots q_n) = 0 \qquad (١٠ـ٣٠)$$

وبتفاضلهـا نحصـل على الصيغـة التفاضليـة لشـرط المقيـد

$$\sum_k \frac{\partial g}{\partial q_k}\,\delta q_k = 0 \qquad (١٠ـ٣١)$$

هناك ايضا انواع معينة للمقيدات تكون فيها العلاقة التفاضلية من النوع

$$\sum_k h_k \,\delta q_k = 0 \qquad (١٠ _ ٣٢)$$

التي يمكن ايجادها ولكن هذه المعادلات لا يمكن تكاملها لتعطي المعادلة الشرطية من النوع $f(q_1,q_2,\ldots q_n)=0$. مقيدات كهذه يقال عنها بانها ليست هولونومك nonholonomic بينما اذا كان المقيد على شكل المعادلة (١٠ ــ ٣٠) فيسمى هولونومك •

على اية حال ، سواء كانت المقيدات هولونومك او ليست هولونومك فمن الممكن ايجاد المعادلات التفاضلية للحركة بالصيغة اللاكرانجية وذلك باستخدام طريقة المضروبات غير المعينة undetermined multipliers. من الملائم في هذا التطبيق استعمال قاعدة التغير لهملتن •

لنضرب المعادلة التفاضلية للمقيد ، المعادلة (١٠ ــ ٣٢) ، بالپرمتر λ . وهذا يمثل المضروب غير المعين الذى قيمته غير معروفة لحد الان • فاذا اضيف التعبير الناتج الى التكاملية للمتغير التكاملي في المعادلة (١٠ــ٢٦) فمن الواضح ان النتيجة لا تتغير من ناحية تلاشي التكامل ، اى

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \lambda h_k \;\delta q_k\right) dt = 0$$

وبسبب المقيد ، $n - 1$ فقط من n يمكن اعتبارها حرة من الكميات δq_k . نختار الان قيمة للپرمتر λ بحيث يتلاشى احد الحدود بين القوسين ، مثل الحد الاول • عندئذ يمكن اعتبار الحدود $n-1$ المتبقية مستقلة • ووفقا لذلك ، يجب ان تتلاشى الحدود المتبقية بين القوسين ايضا • اذن يمكننا كتابة

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \lambda h_k = 0 \quad (k = 1,2,\ldots,n) \qquad (١٠ _ ٣٣)$$

$$\sum_k h_k \dot{q}_k = 0 \qquad (١٠ - ٣٤)$$

نتجت المعادلة الاخيرة من قسمة المعادلة التفاضلية ذات المقيد ، المعادلة (١٠ ـ ٣٢) على δt . هناك الان ما مجموعه $n+1$ من المعادلات التفاضلية اذن يمكن ايجاد $n + 1$ من الكميات λ ، $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

ويمكن التوسع في هذه الطريقة لكي تحتوي على اكثر من معادلة واحدة فقط ذات مقيد وذلك باضافة مضروبات غير معينة اكثر مع ما يقابلها من ال h's الى معادلات لاكرانج • ويمكن البرهنة على ان معادلات الحركة كما اعطيت اعلاه تطبق ايضا عندما تكون المقيدات متحركة • وللتوسع في معالجة هذه الطريقة على القارئ ان يراجع كتابا متقدما [٣]

See, for example E.T. Whittaker, Analytical, Dynamics, Cambridge University press, Cambridge, 1937. or C. Lanczos, The Variational principles of Mechanics, University of Toronto press, Toronto, 1949.

تمـــــــــارين

يجب استخدام طريقة لاكرانج لحل التمارين التالية ، ما لم يذكر خلاف ذلك .

١٠ـ ١) . جد تعجيل كرة صلدة منتظمة تتدحرج اسفل سطح تام الخشونة ، اذا علمت ان السطح ثابت و يميل بزاوية θ مع الافق .

١٠ـ ٢) كرة كتلتها m تتدحرج اسفل اسفين متحرك كتلته M و زاويته θ . فاذا كان الاسفين ينزلق بحرية على سطح افقي املس وكان التلامس بين الكرة و الاسفين تام الخشونة جد تعجيل الاسفين .

١٠ـ٣) ينزلق جسيم على سطح مائل املس ، ميله θ يزداد بمعدل زمني ثابت ω . فاذا كانت $\theta=0$ في الزمن $t = 0$ ، و هو زمن بداية حركة الجسيم من السكون ، جد حركة الجسيم اللاحقة .

١٠ـ ٤) قالبان كتلتاهما متساويتان و مقدار كل منهما m ربطا بحبل خفيف غير قابل للمط . فاذا وضع احد القالبين على طاولة افقية ملساء و علق القالب الاخر على حافة الطاولة . جد تعجيل المنظومة .

١٠ ـ ٥) حل تمرين (١٠ ـ ٤) للحالة التي يكون فيها الحبل ثقيلا كتلته m' .

١٠ـ ٦) جد حركة قذيفة في مجال جاذبية منتظم ، بدون مقاومة الهواء

١٠ ـ ٧) ضع معادلات الحركة لمزدوجة ـ مزدوجة ماكنة اتود التي تتكون من ماكنة اتود واحدة (كتلتاها m_1 و m_2) مربوطتين بحبل خفيف يمر على بكرة الى ماكنة اتود ثانية كتلتاها m_3, m_4 اهمل كتل جميع البكرات . جد التعجيلات الحقيقية للحالة $m_1 = m$, $m_2 = 4m$, $m_3 = 2m$, $m_4 = 3m$.

١٠ـ ٨) . اثبت ان طريقة لاكرانج تعطى اتوماتيكيا معادلات الحركة الصحيحة لجسيم يتحرك في مستوفي محاور دائرة Oxy (تلميح $T= \frac{1}{2}m\vec{v}.\vec{v}$

حيث $\vec{V}=\hat{i}(\dot{x}-\omega y)+\hat{j}(\dot{y}+\omega x)$, $F_x=-\partial V/\partial x$, $F_y=-\partial V/\partial y$)

١٠ــ ٩) حل التمرين السابق مرة ثانية للحركة في ثلاثة ابعاد

١٠ــ١٠) جد المعادلات التفاضلية لحركة (بندول مرن) الذى يتكون من جسيم كتلته m مربوط بوتر مرن صلابته k وطوله غير المطط يساوى ℓ_0 . افرض ان الحركة تحدث في مستو شاقولي ٠ استخدم المحاور القطبية r ،θ واثبت ان المعادلات التفاضلية تختصر الى معادلة البندول البسيط عندما تكون r ثابتة والى معادلة نابض متذبذب بسيط عندما تكون $\dot{\theta}$ = ثابت = صفر

١٠ــ ١١) جد المعادلات التفاضلية العامة لحركة جسيم في المحاور الاسطوانية R ، ϕ ،z . استخدم العلاقة

$$v^2 = v_R^2 + v_\phi^2 + v_z^2 = \dot{R}^2 + R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2$$

١٠ــ١٢) جد المعادلات التفاضلية العامة لحركة جسيم في المحاور الكروية ϕ ، θ ، r .استخدم العلاقة

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 + v_\phi^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2$$

١٠ــ١٣) ارتفعت نقطة استناد بندول بسيط بتعجيل ثابت a بحيث كان ارتفاعها يساوى $\frac{1}{2}at^2$ وسرعتها الشاقولية هي at . جد المعادلة التفاضلية لحركة بندول ذبذباته صغيرة بطريقة لاكرانج ٠ اثبت ان زمن ذبذبة البندول هي $2\pi\left[\ell/(g+a)\right]^{\frac{1}{2}}$ حيث ℓ يمثل طول البندول.

١٠ــ١٤) اذا كانت نقطة استناد بندول بسيط تتحرك باتجاه افقي بتعجيل ثابت a جد معادلة الحركة و زمن الذبذبة لذبذبات صغيرة ٠

١٠ــ ١٥) استخدم طريقة لاكرانج لايجاد المعادلات التفاضلية للحركة لبندول كروى في المحاور الكروية ٠

١٠ ــ ١٦) جــد المعادلات التفاضليــة لحركة بندول كروى مرن ، كما في التمـــرين ١٠ ــ ١٠ ٠

١٠ ــ ١٧) جــد المعادلات التفاضليــة لحركــة جسـيم مقيــد الحركــة على مخروط دائـرى ــ قائـم املس علمـا بان محـور المخروط في وضـع شـاقولي ٠

١٠ ــ ١٨) اثبت في التمرين السابق انــه عــندما يعطى الجسـيم حركة ابتدائية سـيتذبذب بين دائرتين افقيتين على المخروط ٠ (تنبيه : اسـتخدم المحــاور الكرويــة مع θ = ثابت) ٠ اثبت ان $\dot{r}^2 = f(r)$ حيث $f(r)=0$ لــه جــذران يعرّفــان الغايتين التي يجب ان يبقى الجسيم بينهمــا ٠

١٠ ــ ١٩) قضيبان متماثــلان BC, AC كتلــة كل منهما m وطولــه $2a$ ربطــا بمفصــل ناعــم في النقطــة B ٠ ووضـع القضيبان في حالة سـكون علــى طاولـة افقيــة ملسـاء وكان كل منهما عمـودى على الاخـر في البدايــة ٠ فــاذا سـلط دفــع P في النقطــة A وعلى طول القضيب AB٠ جـد حركــة المنظومـــة مباشـرة بعــد تسـليط الدفــع ٠

١٠ ــ ٢٠) اثبت ان دالــة لاكــرانــج

$$L = \frac{1}{2} mv^2 - q\phi + q\vec{v}\cdot\vec{A}$$

تعطي المعادلــة الصحيحــة لحركــة جسـيم في مجـال كهرومغناطيسـي ، اى

$$m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

حيث

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad , \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

(تسـمى الكميــة المتجهــة $\vec{A}$ بمتجــه الجهــد والكميــة العدديــة ϕ بالجهد العــــددى)

١٠ ــ ٢١) جــد (أ) الزخـم المعمم و (ب) دالــة هملتن H لدالــة لاكرانـج المذكـورة في تمرين (١٠ ــ ٢٠)

١٠ــ ٢٢) جد وحل معادلات هملتن القانونية ل (أ) تذبذبة ببعدين (ب) بندول بسيط

١٠ــ ٢٣) ضع معادلات هملتن لبندول كروى

١٠ــ ٢٤) تحقق من ان التكامل $\int L\,dt$ ياخذ قيمة عظمى وصغرى لحالة جسم يسقط فى مجال جاذبية منتظم : لحل هذا التمرين ، افرض ان $y(t)=y_0-\frac{1}{2}gt^2$ وقارن ناتج التكامل مع القيمة التى استنتجت من اخذ دالة تختلف قليلا عن $y(t)$.

الفصـــل الحادي عشـــــر

نظرية التذبذب Theory of Vibrations

الحالات البسيطة للمنظومات التي يمكنها ان تتذبذب حـــول وضــــع تـــــوازن configuration of equilibrium تشتمل على البندول البسيط، الجسيم المربوط بنابض مرن، البندول الفيزيائي وما الى ذلك، جميع هذه الحالات لها درجـــة حريـــة واحدة ، تتصف بتذبذب احادي التردد . عندما نفرض منظومات اكثر تعقيداً ـ منظومات لها عدة درجات حرية ـ سوف نجد انها لاتتصف بتردد واحد بل يحتمل حدوث عدة ترددات مختلفة . وعند دراستنا للمنظومات المتذبذبة ، سوف نجد من المناســـــب استخدام الاحداثيات المعممـــة واستخدام طريقة لاكرانج لايجاد معادلات الحركـــــة بدلالة هذه الاحداثيات .

(١١ـ١) الطاقة الكامنة والتوازن ـ الاستقرار

Potential Energy and Equilibrium. Stability

قبل ان نبدأ بدراسة حركة منظومة حول وضع توازن، لنختبر باختصار التوازن نفسه . افرض ان منظومة لها n درجة حرية ، وان الاحداثيات المعممة $q_1, q_2, \ldots q_n$ تعين الوضع تعينا كاملا . سوف نفرض ان المنظومة محافظة وان الطاقة الكامنـــــة V هي دالة للاحداثيات q's فقط . اى

$$V = V(q_1, q_2, \ldots q_n)$$

راينا ان القوى المعممة Q_k تعطى من

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \qquad (١ـ١١)$$

يعرف وضع التوازن بانــه الوضع الذي تتلاشى فيـــه جميع القوى المعممـــة ، اى

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \qquad (٢ـ١١)$$

تحتوى هذه المعادلات على الشرط الضروري للمنظومة لكي تبقى في حالة سكون ، اذا كانت في البدء في حالة سكون . لكن اذا ازيحت المنظومة ازاحة صغيرة فقط فقد تعود او لاتعود الى حالة التوازن واذا ازيحت منظومة ازاحة صغيرة وحاولت دائما العودة الى التوازن ، يكون التوازن مستقرا ، stable وعدا ذلك يكون التوازن غير مستقر unstable (اذا كانت المنظومة لاتحاول الحركة نحو التوازن او بعيد منه ، يسمى التوازن بالمستمر neutral) الكرة الموضوعة (١) في قعر وعاء كروى (٢) على قمة وعاء كروى (٣) على سطح مستو هي امثلة على التوازن المستقر ، غير المستقر والمستمر على التتالي .

لنر كيف تدخل دالة الطاقة الكامنة V في الشرح . افرض ان دفعا صغيرا قد سلط على منظومة فجعلها تتحرك في وضع توازن . ولما كانت الطاقة الكلية ثابتة ، فيمكننا كتابة

$$T + V = T_0 + V_0$$

او

$$T - T_0 = -(V - V_0) \qquad (١١ـ٣)$$

حيث T_0 هي طاقة المنظومة الحركية عندما تكون في وضع التوازن (كنتيجة للدفع) ، و V_0 هي الطاقة الكامنة في وضع التوازن . الان ، اذا كانت الطاقة الكامنة في نهايتها العظمى في وضع التوازن ، عندئذ $V - V_0$ تكون سالبة ، وبناء على ذلك تكون $T - T_0$ موجبة ، اى ان T تزداد عندما تبتعد المنظومة عن التوازن . وواضح ان هذه الحالة تكون غير مستقرة . وبالعكس ، اذا كانت الطاقة الكامنة في وضع التوازن في نهايتها الصغرى ، عندئذ تكون $V - V_0$ موجبة ، و $T - T_0$ سالبة ، اى ان ، T تتناقص . ولكن لايمكن ان تكون T سالبة ، وهكذا تتناقص T الى

الصفر في وضع حدى قريب من التوازن، طبعا يجب ان تكون T_0 صغيرة جـــــدا ٠ ان التوازن في هذه الحالة يكون مستقرا ٠ فمعيار التوازن المستقر اذ ن هو ان تكـــون الطاقــة الكامنــة في نهايتها الصغرى ٠

لمنظومــة ذات درجة حرية واحدة ، عندنا

$$V = V(q) \qquad (١١ــ٤)$$

وفي التوازن

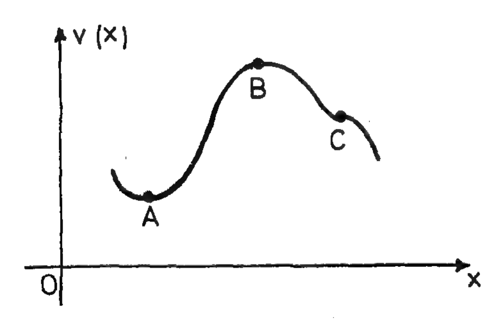
$$\frac{dV}{dq} = 0 \qquad (١١ــ٥)$$

عندئذ يعبر عن الاستقرار كما يلي

$$\frac{d^2V}{dq^2} > 0 \quad \text{(مســـتقرة)} \qquad (١١ــ٦)$$

$$\frac{d^2V}{dq^2} < 0 \quad \text{(غير مســتقرة)} \qquad (١١ــ٧)$$

اذا كانت $d^2V/dq^2 = 0$ فيجب علينا اختبار المشتقات الاعلى رتبــة ٠ (لقد بحثت هذه في البند التالي) ٠ يمثل الشكل (١١ــ١) مخطط دالــة جهـد افتراضية



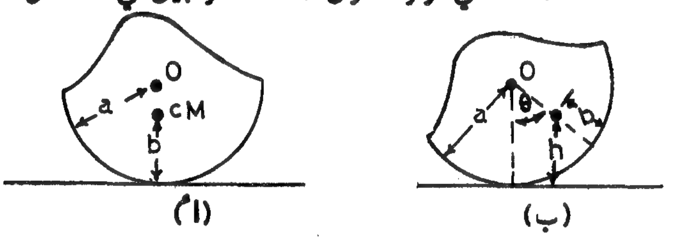
الشــكل (١١ ــ ١)

دالة طاقة الجهد $V(x)$ ٠ تمثل النقطة A توازن مستقر ٠ النقطتان B و C غير مســـتقرتي ٠

تمثل النقطة A موضع توازن مستقر وتمثل النقاط B, C مواضع توازن غير مستقره ٠

مثال

لنختبر توازن جسم قاعدته مدوره (كروية او اسطوانية) التي تتوازن على سطح مستو افقي ٠ لنفرض ان a يمثل نصف قطر تقوس القاعدة ، وان مركز الكتلة CM يبعد بمسافة b من نقطة التماس الابتدائية ، كما هو مبين في الشكل ١١ــ٢ (آ) ٠ يبين الشكل ١١ــ٢ ب موضع الجسم بعد ازاحته ، حيث θ تمثل الزاوية بين العمود والخط OCM (O هي مركز التقوس) ، كما هو مبين في الشكل ٠



الشكل ١١ــ٢ ٠ الاحداثيات لتحليل التوازن المستقر لجسم قاعدته مستديرة

لنفرض ان h تمثل المسافة بين المستوى ومركز الكتلة ، عندئذ الطاقة الكامنة تعطى من

$$V = mgh = mg\left[a - (a - b)\cos\theta\right]$$

حيث m هي كتلة الجسم ٠ عندئذ

$$\frac{dV}{d\theta} = mg\,(a - b)\sin\theta$$

اى ان

$$\theta = 0 \quad \text{عندما} \quad \frac{dV}{d\theta} = 0$$

اذن $\theta = 0$ هي موضع توازن ٠ اضف الى ذلك

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = mg\,(a - b)\cos\theta$$

و

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = mg\ (a - b) \quad \text{عندما} \quad \theta = 0$$

اذ ن يكون التوازن مستقرا عندما $a > b$ ، اى ان ، اذا كان مركز الكتلة يقع تحت مركز التقوس .

(١١ـ ٢) فك دالة الطاقة الكامنة بمتسلسة اساسية

Expansion of the Potential-Energy Function in a Power Series.

لنفرض اولا منظومة لها درجة حرية واحدة . وافرض اننا نفك دالة الطاقة الكامنة $V(q)$ كمتلسلسة اساسية حول النقطة $q = a$. عندنا

$$V(q) = k_o + k_1\ (q - a) + \frac{1}{2!}\ k_2\ (q - a)^2 + \cdots\cdots + \frac{1}{n!}\ k_n\ (q - a)^n + \cdots\cdots$$

حيث

$$k_n = \left(\frac{d^nV}{dq^n} \right)_{q=a}$$

الان ، اذا كانت النقطة $q=a$ هي موضع توازن ، عندئذ $k_1=(dV/dq)_{q=a} = 0$. هذا يحذف الحد الخطي في المفكوك ، بحيث

$$V(q) = k_o + \frac{1}{2!}\ k_2\ (q - a)^2 + \cdots\cdots \qquad (١١ـ ٨)$$

ويعتمد استقرار التوازن في النقطة $q = a$ على اول حد غير متلاشي بعد الحد الاول k_o ،في المفكوك السابق . اذا كان اس هذا الحد n زوجيا ، عندئذ يكون التوازن مستقرا ، اذا كانت المشتقة d^nV/dq^n موجبة . واذا كانت المشتقة سالبة او كانت n فردية فالتوازن يكون غير مستقر . لكي نرى لماذا يكون ذلك ، لنفرض ان n

تمثل رتبة الحد غير المتلاشي الاول • عندئذ لابتعاد صغير من نقطة التوازن عندنا

$$F = -\frac{\partial V}{\partial q} \simeq -k_n (q-a)^{n-1}$$

والان للتوازن المستقر يجب ان يكون اتجاه F نحو a ، اى انها سالبة اذا كانت $q > a$ وموجبة اذا كانت $q < a$ • يمكن ان تكون هذه الحالة فقط اذا كانت k_n موجبة و n زوجية •

في معظم الحالات التي لها اهمية فيزيائية هي عندما تكون $n = 2$ اى ان الطاقة الكامنة تكون دالة من الدرجة الثانية للازاحة والقوة دالة خطية • فاذا نقلنا نقطة الاصل الى النقطة $q=a$ واعتباطيا وضعنا $V(0)=0$ عندئذ يمكننا كتابة

$$V(q) = \tfrac{1}{2} k_2 p^2 \tag{١١ـ٩}$$

اذا اهملنا القوى الاعلى لـ q •

وبالتماثل ، لحالة منظومة لها عدة درجات حرية ، فيمكننا ان نسبب تحويل خطي بحيث يكون $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$ وضعا توازنا • اذا كان يتواجد وضع توازن • فدالة الطاقة الكامنة يمكن فكها عندئذ بالصيغة التالية

$$V(q_1, q_2, \ldots q_n) = \tfrac{1}{2}(k_{11} q_1^2 + 2k_{12} q_1 q_2 + k_{22} q_2^2 + \ldots) \tag{١١ـ١٠}$$

حيث

$$k_{11} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)_{q_1=q_2=\ldots=q_n=0}$$

$$k_{12} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_{q_1=q_2=\ldots=q_n=0}$$

وهلم جرا • وضعنا اعتباطيا $V(0, 0, \ldots\ldots 0) = 0$ • لقد اختفت الحدود الخطية في المفكوك لان الفك كان حول وضع توازن •

التعبير بين القوسين في المعادلة (١١ــ١٠) يسمى بصيغة الدرجة الثانية ٠

فاذا حددت [١] هذه الصيغة بانها موجبة اى اما ان تكون صفراً او موجبة لجميع قيم q's عندئذ وضع التوازن $q_1=q_2=\cdots=q_n=0$ يكون مستقراً ٠

١١ــ٣ تذبذب منظومة ذات درجة حرية واحدة

Oscillations of a System with one Degree of Freedom.

اذا كانت منظومة لها درجة حرية واحدة فيمكن كتابة الطاقة الحركية كما يلي :

$$T = \tfrac{1}{2}\,\mu\,\dot{q}^2 \qquad (١١ــ١١)$$

هنا قد يكون المعامل μ ثابتا او دالة للاحداثيات المعممة q ٠ على اية حال، يمكننا فك μ كمتسلسلة اساسية في q ونكتب

$$\mu = \mu(0) + \left(\frac{d\mu}{dq}\right)_{q=0} q + \cdots\cdots \qquad (١١ــ١٢)$$

اذا كانت $q=0$ هي موضع توازن، فسوف نفرض q صغيرة بحيث يكون التقريب ساري المفعول ٠

$$\mu = \mu(0) = \text{constant} \qquad (١١ــ١٣)$$

ومن المعادلة (١١ــ٩) نرى ان دالة لاكرانج L يمكن كتابتها كما يلي :

---

(١) الشرطان الضروري والكافي للصيغة ذات الدرجة الثانية في المعادلة (١١ــ١٠) لكي تكون موجبة هي

$$k_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} > 0$$

وهلم جرا ٠

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}\mu \dot{q}^2 - \tfrac{1}{2} kq^2 \qquad (11\text{–}14)$$

حيث $k=k_2 = (d^2V/dq^2)_{q=0}$ • معادلة لاكرانج للحركة

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

عندئذ تعطي

$$\mu\ddot{q} + kq = 0 \qquad (11\text{–}15)$$

اذن اذا كانت $q = 0$ هي موضع توازن مستقر، اي اذا كانت $k > 0$ عندئذ تتذبذب q توافقيا حول موضع التوازن بتردد زاوى

$$\omega = \sqrt{k/\mu} \qquad (11\text{–}16)$$

و

$$q = q_0 \cos(\omega t + \epsilon) \qquad (11\text{–}17)$$

حيث q_0 تمثل سعة التذبذب ، و ϵ هي زاوية الطور• وتستنتج قيم ثوابت التكامل من الشروط الابتدائية •

مثـــال

افرض حركة الجسم المدور ــ القاعدة الذى بحث في مثال البند السابق (الشكل (١١ ــ ٢) • اذا كان التماس تام الخشونة نحصل على حركة دورانية فقط ، ويكون انطلاق مركز الكتلة القرب هو $b\dot{\theta}$ لزاوية صغيرة θ • ووفقا لذلك الطاقة الحركية T تكون كما يلي :

$$T = \tfrac{1}{2} m (b\dot{\theta})^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\,\dot{\theta}^2$$

حيث I_{cm} يمثل عزم القصور الذاتي حول مركز الكتلة • كذلك ، يمكننا التعبير عن دالة الطاقة الكامنة V كما يلي

$$V(\theta) = mg\left[a - (a-b)\cos\theta\right]$$
$$= mg\left[a - (a-b)\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right)\right]$$

حدود عليا + ثابت + $= \frac{1}{2} mg(a-b)\,\theta^2$

عندئذ يمكننا كتابة

$$L = \frac{1}{2}(mb^2 + I_{cm})\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} mg(a-b)\,\theta^2$$

بعد اهمال الثوابت والحدود العليا ، وعند المقارنة مع المعادلتين
(١١ــ١٤) و (١١ــ١٥) نرى ان

$$\mu = mb^2 + I_{cm}$$
$$k = mg(a-b)$$

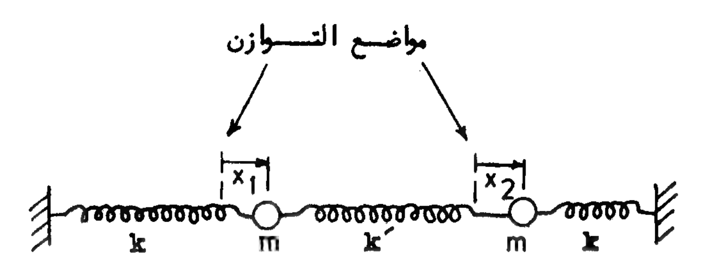
وعليه فان الحركة حول موضع التوازن $\theta = 0$ تكون تقريبا حركة توافقية بسيطة ترددها الزاوي

$$\omega = \sqrt{\frac{mg(a-b)}{mb^2 + I_{cm}}} \qquad (١١ــ١٨)$$

١١ــ٤ متذبذبان توافقيان مزدوجان
Two Coupled Harmonic Oscillators

قبل ان نستنبط النظرية العامة للمنظومات المتذبذبة باى عدد من درجات الحرية ، سوف ندرس مثالاً خاصاً وهو منظومة متكونة من متذبذبين توافقيين مزدوجين معا . يبين الشكل (١١ــ٣) جسيمين كتلة كل منهما m وقد ربط كل جسيم بنابض خفيف صلابته k . وازدوج الجسيمين ايضا معا بنابض ثالث صلابته k' . سنفرض ان الجسيمين مقيدا الحركة على خط مستقيم (الاتجاه x كما هو مبين) .

فالمنظومة اذن لها درجتا حرية ، سنختار الاحداثيين x_1 , x_2 لازاحتي



الشكل ١١ـ ٣ ٠ نموذج لمتذبذبين توافقين مزدوجين

الجسيمين من موضعي توازنهما المتتالين ، ليمثلان وضع المنظومة ٠

الطاقة الحركية للمنظومة هي

$$T = \tfrac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2} m\dot{x}_2^2 \qquad (11\text{-}19)$$

والطاقة الكامنة هي

$$V = \tfrac{1}{2}kx_1^2 + \tfrac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2 + \tfrac{1}{2}kx_2^2 \qquad (11\text{-}20)$$

اذن دالة لاكرانج L هي كالاتي

$$L = \tfrac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \qquad (11\text{-}21)$$

والمعادلات التفاضلية للحركة

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial L}{\partial x_1} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial L}{\partial x_2}$$

عندئذ تصبح

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + k'(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 &= -kx_2 - k'(x_2 - x_1) \end{aligned} \qquad (11\text{-}22)$$

او

$$\ddot{x}_1 + \frac{k}{m} x_1 - \frac{k'}{m}(x_2 - x_1) = 0$$
(١١ـ٢٣)
$$\ddot{x}_2 + \frac{k}{m} x_2 + \frac{k'}{m}(x_2 - x_1) = 0$$

ولو لم يكن نابض الازدواج k' ، لامكن فرز المعادلتين ولتحرك كل جسيم بحرية بحركة توافقية بسيطة ترددها $\sqrt{k/m}$. فمن المناسب اذن تجربة الحل الذى يعتمد فيه كل من x_1 و x_2 على الزمن من خلال العامل $\cos\omega t$ حيث ω يجب ان تستنتج . حلنا التجريبي هو

$$x_1 = A_1 \cos\omega t$$
(١١ـ٢٤)
$$x_2 = A_2 \cos\omega t$$

وبالتعويض المباشر في المعادلة (١١ـ٢٣) نجد ان

$$-\omega^2 A_1 \cos\omega t + \frac{k}{m} A_1 \cos\omega t + \frac{k'}{m}(A_1 - A_2)\cos\omega t = 0$$
(١١ـ٢٥)
$$-\omega^2 A_2 \cos\omega t + \frac{k}{m} A_2 \cos\omega t + \frac{k'}{m}(A_2 - A_1)\cos\omega t = 0$$

وعند حذف العامل المشترك $\cos\omega t$ وتجميع الحدود نحصل على

$$\left(\frac{k + k'}{m} - \omega^2\right)A_1 - \frac{k'}{m} A_2 = 0$$
(١١ـ٢٦)
$$-\frac{k'}{m} A_1 + \left(\frac{k + k'}{m} - \omega^2\right) A_2 = 0$$

هذه هي الشروط المفروضة على المعامل A_1 ، A_2 اذا كانت دالتنا التجريبية هي فعلا حل . اذن اما ان تكون $A_1 = A_2 = 0$ والا يجب ان يتلاشى محدد المعامل التالي

$$\begin{vmatrix} \frac{k+k'}{m} - \omega^2 & -\frac{k'}{m} \\ -\frac{k'}{m} & \frac{k+k'}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (١١-٢٧)$$

وتسمى هذه بالمعادلة البدائية secular equation

وعند فك المعادلة البدائية المذكورة اعلاه نحصل على

$$\left(\frac{k+k'}{m} - \omega^2\right)^2 - \left(\frac{k'}{m}\right)^2 = 0 \qquad (١١-٢٨)$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية في ω^2 . والجذران اللذان نمثلهما بالرمزيـــــن ω_a و ω_b هما

$$\omega_a = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\omega_b = \left(\frac{k+2k'}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

والترددان ω_a , ω_b يسميان بالترددين العياريين ـ normal frequencies للمنظومة . عندنا الان حلين ممكنين

(آ)

$$x_1 = A_1 \cos \omega_a t \qquad x_2 = A_2 \cos \omega_a t \qquad (١١-٢٩)$$

و (ب)

$$x_1 = B_1 \cos \omega_b t \qquad x_2 = B_2 \cos \omega_b t \qquad (١١-٣٠)$$

لاحظ ان الجذور السالبة للمعادلة الاولية لاتعطي حلولا مختلفة لان $\cos(-\omega t) = \cos \omega t$. والسعات A_1, A_2, B_1, B_2 مستقلـه . فاذا عوضنا قيم ω في المعادلات (١١-٢٦) نحصل على مايلي

(آ) عندما $\omega = \omega_a$

$$\left(\frac{k+k'}{m} - \frac{k}{m}\right)A_1 + \frac{k'}{m} A_2 = 0$$

وهذا يختصر الى

(١١ـ ٣١) $$A_1 = A_2$$

(ب) عندما

$$\omega = \omega_b$$

$$\left(\frac{k+k'}{m} - \frac{k+2k'}{m}\right)B_1 - \frac{k'}{m} B_2 = 0$$

وهذا يختصر الى

(١١ـ ٣٢) $$B_1 = -B_2$$

اذن حلولنا (المعادلات (١١ـ ٢٩)، (١١ـ٣٠) يمكن التعبير عنها كما يلي

(١١ـ ٣٣) $$x_1 = A\cos\omega_a t \qquad x_2 = A\cos\omega_a t$$

(١١ـ ٣٤) $$x_1 = B\cos\omega_b t \qquad x_2 = -B\cos\omega_b t$$

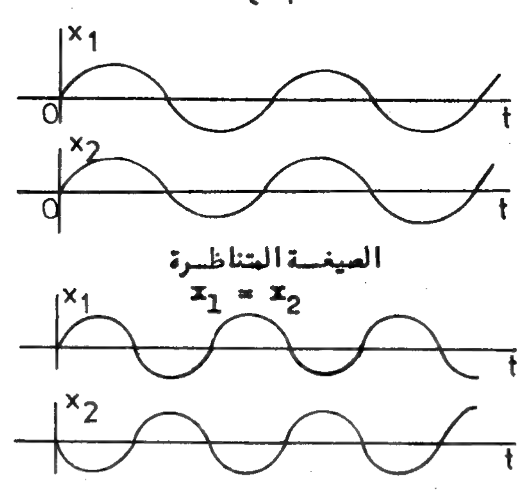
وليس من الضروري الاستمرار في استخدام الحروف السفلية ٠ والتذبذبات الممثلة في الحلول اعلاه تسمى بالصيغ العيارية normal modes ٠ والشرط الذي تتميز به الصيغ العيارية هو ان جميع الاحداثيات تتذبذب بنفس التردد ٠ في حالتنا يكون التذبذب في التردد ω_a بحيث ان

$$x_1 = x_2$$

وهذه تسمى بالصيغة المتناظرة Symmetric mode ٠ ويكون التذبذب في التردد ω_b بحيث ان

$$x_1 = -x_2$$

وتسمى هذه بالصيغة غير المتناظرة ٠ الشكل ١١ـ ٤ يبين مخططات الصيغتين العياريتين ٠



الصيغــة غير المتناظرة $x_1 = -x_2$

الشكل (١١ـ ٤) : مخططات ازاحة ـ زمن للصيغ العيارية لمزدوج متذبذب توافقي

الحل الكامل The Complete Solution

لنعود الى الوراء ونفرض المعادلات التفاضلية الاصلية للحركة ، المعادلــة (١١ـ٣٤) • يمكننا بسهولة روية ان الحل التجريبي الذى تعتمد فيه x's على الزمن من خلال العامل $\sin \omega t$ بدلا من $\cos \omega t$ سيعطي جوهريا نفس النتائج التي حصلنا عليها سابقا • اى على نفس الترددات والصيغ العيارية اى ان

$$x_1 = A' \sin \omega_a t \qquad x_2 = A' \sin \omega_a t \tag{١١ـ٣٥}$$

و

$$x_1 = B' \sin \omega_b t \qquad x_2 = -B' \sin \omega_b t \tag{١١ـ٣٦}$$

تكون ايضا حلولا . ولما كانت المعادلات التفاضلية خطية نعلم ان الحلول قد تجمع سويا لتعطي حلولا اخرى. لذلك يمكننا كتابة الحل الكامل على النحو التالي

$$x_1 = A\cos\omega_a t + A'\sin\omega_a t + B\cos\omega_b t + B'\sin\omega_b t$$
(١١_٣٧)
$$x_2 = A\cos\omega_a t + A'\sin\omega_a t - B\cos\omega_b t - B'\sin\omega_b t$$

وتستنتج السعات من الشروط الابتدائية. اذن في الزمن $t = 0$ عندنا

$$x_1(0) = A + B \qquad x_2(0) = A - B$$

كذلك ، عند تفاضلها بالنسبة للزمن t ، نحصل في الزمن $t=0$ على العلاقات التالية

$$\dot{x}_1(0) = A'\omega_a + B'\omega_b$$
$$\dot{x}_2(0) = A'\omega_a - B'\omega_b$$

والآن يمكننا الحل للسعات لنجد

$$A = \tfrac{1}{2}\left[x_1(0) + x_2(0)\right] \quad , \quad B = \tfrac{1}{2}\left[x_1(0) - x_2(0)\right]$$
(١١_٣٨)
$$A' = \frac{1}{2\omega_a}\left[\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)\right] \quad , \quad B' = \frac{1}{2\omega_b}\left[\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)\right]$$

هذه المعادلات تسمح لنا بايجاد تهيجات الصيغتين العياريتين من الشروط الابتدائية. افرض على سبيل المثال أن الجسمين قد سحبا في البدء من موضعي توازنهما بمقدارين متساويين وفي نفس الاتجاه واطلقا بحيث كانت الشروط الابتدائية على النحو التالي $x_1(0) = x_2(0) \quad , \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$

فالنتيجة هي تهييج الصيغة المتناظرة فقط، لان تتلاشى جميع الثوابت ماعدا A .

وبالعكس اذا بدأت الحركة بسحب الجسمين بمقدارين متساويين وفي اتجاهين متعاكسين ثم اطلقا ، فعندئذ الشروط الابتدائية تكون $x_1(0)=-x_2(0), \dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$

في هذه الحالة جميع الثوابت تساوى صفرا ماعدا B اى ان غير المتناظر فقط يكـــــون متهيجا • وبصورة عامـــة يتكون تذبذب المنظومـــة من مزيج الصيغتين •

(١١ـ٥) الاحداثيات العياريـــة Normal Coordinates

لوصف حركـــة مزدوج متذبذبين توافقيين • نستخدم منظومـــة احداثيات جديـدة هي q_a ، q_b والمعرفة كالاتي

$$q_a = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_2)$$
$$q_b = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 - x_2) \qquad (١١ـ٣٩)$$

لنعبر عن دالة لاكرانج بدلالة هذه الاحداثيات • عندنا

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_a + q_b)$$
$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_a - q_b) \qquad (١١ـ٤٠)$$

اذن

$$T = \frac{m}{2} \frac{(\dot{q}_a+\dot{q}_b)^2}{2} + \frac{m}{2} \frac{(\dot{q}_a-\dot{q}_b)^2}{2} = \frac{m}{2} \dot{q}_a^2 + \frac{m}{2} \dot{q}_b^2$$

$$V = \frac{k}{2} \frac{(q_a+q_b)^2}{2} + \frac{k}{2} \frac{(q_a-q_b)^2}{2} + \frac{k'}{2} q_b^2 = \frac{k}{2} q_a^2 + \frac{k''}{2} q_b^2$$

وهكذا دالة لاكرانج تصبح

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}_a^2 + \frac{m}{2} \dot{q}_b^2 - \frac{k}{2} q_a^2 - \frac{k''}{2} q_b^2 \qquad (١١ـ٤١)$$

حيث

$$k'' = k + 2k'$$

معادلات لاكرانج للحركـة

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial L}{\partial q_a} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b} = \frac{\partial L}{\partial q_b}$$

تصبح ببساطـة

$$m\ddot{q}_a = -kq_a \qquad m\ddot{q}_b = -k'' q_b \qquad (١١ــ ٤٢)$$

فالمعادلات اذن قد فرزت • ويمكن كتابة الحلول بالمعاينة كما يلي :

$$q_a = \mathcal{A} \cos\,(\omega_a t + \phi_a)$$
$$q_b = \mathcal{B} \cos\,(\omega_b t + \phi_b) \qquad (١١ــ ٤٣)$$

حيـث

$$\omega_a = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_b = \left(\frac{k''}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{k + 2k'}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

نرى الان • لحركة اية منظومة يتذبذب الاحداثي q_a دائمـا بتـردد ω_a ويتذبذب الاحداثي q_b بتردد ω_b • وتسمى الاحداثيات الجديدة q_a و q_b بالاحداثيات العيارية للمنظومة Normal Coordinates .

وفي الحالة العامة • يكون الاحداثي العيارى تركيبا خطيا للاحداثيات بحيـث تختصر الطاقتين الحركية والكامنة الى مجموعات مربعة • عندئذ تفرز معادلات لاكرانج للحركة اتوماتيكيا كالمعادلات (١١ــ ٤٢) • ولذلك يوجد تردد واحد فقط يرافـق كل احداثي عيارى • وتتميز الصيغ العيارية لمنظومة متذبذبة بحقيقة كون وجود لكل صيغة عيارية احداثي عيارى مرافق مع تردده العيارى • وعندما تتذبذب المنظومـة بصيغـة عياريـة نقيـة تتذبذب جميع الجسيمات بتردد واحد وهناك احداثي عيارى واحد فقـط لا يساوى صفراً •

في حالة مزدوجين متذبذبين ، عندنا

(آ) الصيغة المتناظرة

$$\omega = \omega_a, \ q_a \ \text{نشـــط} ,\ q_b = 0, \ x_1 = x_2$$

(ب) الصيغة غير المتناظرة

$$\omega = \omega_b, \ q_b \ \text{نشـــط} ,\ q_a = 0, \ x_1 = -x_2$$

الاحداثيات العيارية لاى منظومـة لها درجتين من درجات الحرية لاجل ايجـاد الاحداثيات العيارية للحالة العامة التي لها درجتان من درجات الحرية، نعـود الى المعادلات الشرطية للسعات ، المعادلات (١١ــ ٢٦) ٠ في الحالة العامة ، يمكـن كتابـة كل معادلة كالنسبة

$$\frac{A_1}{A_2} = c = \frac{x_1}{x_2}$$

حيث c يمثل عددا يمكن ايجاد قيمتـه اذا كانت الترددات العيارية معلومـــة ٠

وبصورة عامة ، تختلف c لكل تردد عيارى ٠ في مثالنا السابق ، $c = +1$ او $c = -1$ ٠ ومن الواضح انـه ، اذا استخدمنا احداثيات جديدة معرّفـة كالاتي

$$q_a = x_1 - c_1 x_2$$
$$q_b = x_1 - c_2 x_2 \qquad (١١ــ٤٤)$$

حيث c_1 ، c_2 هما قيمتا c ، عندئذ q_a ، q_b يجب ان يكونا احداثيين عياريين ٠ لان هذا او ذاك يكون بالضرورة صفراً اذا كانت المنظومـة تتذبذب باحـد تردداتها العيارية ٠ وواضح ان اى ثابت مضاعف للكميات المعرّفة بالمعادلات (١١ــ٤٤) يكون ايضا احداثيا عياريا ٠

مثـــال

لنفرض حركة مايسمى (بالبندول المزدوج) الذى يتكون من وتر خفيف غير قابـــل للتمطط طولـه 2ℓ وقد ثبت احد طرفيـه وعلق في الطرف الآخر جسيم كتلتـه m ، وعلق في مركز الوتـر جسيم كتلتـه ايضا m كما في الشكل (١١ـ٥) ، اذا فرضنا ان المنظومـة تبقى في مستو واحد ، فيمكننا تعيين الوضع بالزاويتين θ و ϕ كما هـــو مبين في الشكل ، لتذبذبات صغيرة حول موضع التوازن، يكون انطلاقا الجسيمين علـى وجـه التقريب $\ell\dot{\theta}$ ، $\ell(\dot{\theta}+\dot{\phi})$ وطاقتاهما الكامنتان $-mg\ell\cos\theta$ ، $-mg\ell(\cos\theta+\cos\phi)$ ، عندئذ تصبح دالة لاكرانج على النحو التالي ،

$$L = \frac{m}{2}\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\ell^2(\dot{\theta}+\dot{\phi})^2 + 2mg\ell\cos\theta + mg\ell\cos\phi$$

معادلات لاكرانج للحركـة

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial\theta} \qquad\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial\phi}$$

عندئذ تصبح

$$m\ell^2\ddot{\theta} + m\ell^2(\ddot{\theta}+\ddot{\phi}) = -2mg\ell\sin\theta$$

$$m\ell^2(\ddot{\theta}+\ddot{\phi}) = -mg\ell\sin\phi$$

اذا فرضنا ان $\sin\theta \simeq \theta$ و $\sin\phi \simeq \phi$ ، وعند ترتيب الحدود نجد ان

$$2\ddot{\theta} + \frac{2g}{\ell}\theta + \ddot{\phi} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \ddot{\phi} + \frac{g}{\ell}\phi = 0 \qquad (١١ـ٤٥)$$

عندئذ المحدد الاولي للمنظومة يكون على النحو التالي

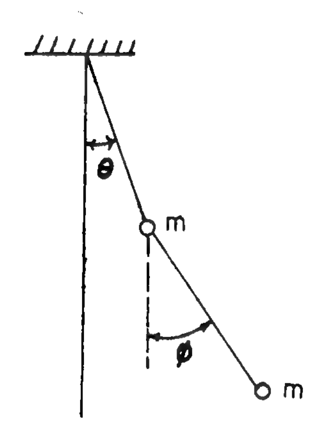
$$\begin{vmatrix} -2\omega^2 + \frac{2g}{\ell} & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2 + \frac{g}{\ell} \end{vmatrix} = 0$$

او

$$\omega^4 - 4\omega^2 \left(\frac{g}{l}\right) + 2\left(\frac{g}{l}\right)^2 = 0$$

اذن الترددان العياريان هما

$$\omega_a = \left[\frac{g}{l}\left(2 - \sqrt{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\omega_b = \left[\frac{g}{l}\left(2 + \sqrt{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (١١ـ ٤٦)$$



الشكل (١١ــ ٥) ، البنـــدول المزدوج

اذا كانت المنظومـــة لتذبذب في اى من ترد داتها العيارية ، عند ئذ اولى معاد لات (١١ــ ٤٥) تعطي

$$\left(-2\omega^2 + 2\frac{g}{l}\right)\theta = \omega^2\phi$$

وعند تعويض قيمتي ω من المعادلات (١١ــ ٤٦) في المعادلة المذكورة اعــلاه ، نحصل على العلاقات التالية بين θ و ϕ للصيغ العيارية

الصيغة المتناظرة $\phi = +\sqrt{2}\ \theta\ ,\ \omega = \omega_a$

الصيغة غير المتناظر $\phi = -\sqrt{2}\ \theta\ ,\ \omega = \omega_b$

نستنتج ان الثابت c في المعادلات (١١ــ ٤٤) يكون لـه قيمتان ، وهـــــي $\sqrt{2}$ ± . اذن الاحداثيات العيارية تصبح

$$q_a = \phi + \sqrt{2}\ \theta$$
$$q_b = \phi - \sqrt{2}\ \theta$$

وقد ترك كتمرين للبرهنة ان دالة لاكرانج تختصر الى مجموعات مربعة عند التعبيـــــر عنها بدلالة الاحداثيات العيارية المذكورة اعلاه

*(١١ــ ٦) النظرية العامة للمنظومات المتذبذبة

General Theory of Vibrating Systems

نعود الان الى منظومة عامة لها n درجة من درجات الحرية ، اثبتنـا فـــي الفصل السابق (البند ١٠ــ٣) ان الطاقة الحركية T تكون دالة من الدرجة الثانيـة ومتجانسة للسرع المعممـة ، اى

$$T = \tfrac{1}{2}\mu_{11}\dot{q}_1^2 + \mu_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \tfrac{1}{2}\mu_{22}\dot{q}_2^2 + \cdots$$
$$= \sum_j \sum_k \tfrac{1}{2}\mu_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \qquad (١١ــ٤٧)$$

بشرط ان لاتوجد مقيدات متحركة . ولما كانت الحركة حول وضع التوازن تهمنا ، فسـوف نفرض ، كما في البند ١١ــ٣ المعادلة (١١ــ ١٣) ان الـ μ's هـي ثوابـــت وتساوى قيمها في وضع التوازن . سوف نفرض اكثر من ذلك ، ان التحويل الخطـــي قد استخدم بحيث وضع التوازن يعطى من

$$q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 0$$

ووفقا لذلك ، الطاقــة الكامنــة V من المعادلة (١١ــ١٠) هي كالاتي

$$V=\tfrac{1}{2}k_{11}q_1^2 + k_{12}q_1q_2 + \tfrac{1}{2}k_{22}q_2^2+\ldots= \sum_j \sum_k \tfrac{1}{2}k_{jk}q_jq_k$$ (١١ــ ٤٨)

عندئذ تاخذ دالة لاكرانج الشكل التالي

$$L = \sum \sum_k \tfrac{1}{2}(\mu_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k - k_{jk}q_jq_k)$$ (١١ــ ٤٩)

ومعادلات الحركـة

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

عندئذ تصبح

$$\sum_j (\mu_{jk}\ddot{q}_j + k_{jk}q_j) = 0 \quad (k = 1,2,\ldots n)$$ (١١ــ ٥٠)

فاذا تواجد حل بالشكل التالي

$$q_k = A_k \cos \omega t \quad (k = 1,2,\ldots.n)$$ (١١ــ ٥١)

عندئذ يجب ان تتحقق المعادلات التالية بالتعويض المباشر

$$\sum_j(-\mu_{jk}\omega^2 + k_{jk})A_j = 0 \quad (k = 1,2,\ldots.n)$$ (١١ــ ٥٢)

والحل غير العادى يتطلب تلاشي محدد العوامل A's اى

$$\begin{vmatrix} -\mu_{11}\omega^2 + k_{11} & -\mu_{12}\omega^2 + k_{12} & \cdots \\ -\mu_{21}\omega^2 + k_{21} & -\mu_{22}\omega^2 + k_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$ (١١ــ ٥٣)

المعادلة الاولية المذكورة اعلاه هي معادلة من درجة n في ω^2. الجذور التي عددها n هي مربعات الترددات العيارية للمنظومـة ٠

تواجد الاحداثيات العيارية

Existence of Normal Coordinates

لما كانت الطاقة الحركية T لايمكن ان تكون سالبة ، فأى تمثيل لـ T بدلالة الاحداثيات المعممة (المعادلة ١١ـ٤٧) يجب ان يكون موجبًا بصورة محددة · وهناك نظرية اساسية في نظرية التحويلات الخطية (٢) نصها : اذا كانت عوامل صيغتي الدرجة الثانيـة

$$\sum_j \sum_k a_{jk}\, x_j x_k \qquad \sum_j \sum_k b_{jk}\, x_j x_k$$

تحقق

$$a_{jk} = a_{kj} \qquad b_{jk} = b_{kj}$$

وكانت الاولى موجبة بصورة محددة ، عندئذ يتواجد التحويل الخطي

$$x_k = \sum_j c_{kj} y_j \qquad (k = 1,2,\ldots.n)$$

بحيث تختصر صيغتـا الدرجة الثانية الى مجموعات مربعة ، اى

$$\sum_j \sum_k a_{jk} x_j x_k = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \ldots + \alpha_n y_n^2$$

$$\sum_j \sum_k b_{jk} x_j x_k = \beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_2^2 + \ldots + \beta_n y_n^2$$

---

(٢) انظر على سبيل المثال

See, for example, L. P. Smith, Mathematical Methods for Scientists and Engineers, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1953.

تنص النظرية ايضا على ان جذور معادلة المحدد

$$\begin{vmatrix} -\gamma a_{11} + b_{11} & -\gamma a_{12} + b_{12} & \cdots \\ -\gamma a_{21} + b_{21} & -\gamma a_{22} + b_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

هي مطابقة لجذور المعادلة

$$\begin{vmatrix} -\gamma \alpha_1 + \beta_1 & 0 & \cdots \\ 0 & -\gamma \alpha_2 + \beta_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

عند تطبيق النظرية على الحالة التي نحن بصددها اى المنظومة المتذبذبــــة .

نرى ان هناك مجموعة احداثيات $\bar{q}_1$ ، $\bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_n$ والتي تعطى بالتحويل الخطي .

$$q_k = \sum_j c_{kj}\bar{q}_j \qquad (k = 1,2,\ldots.n) \qquad (١١ــ٥٤)$$

بحيث ان T و V تختصر الى المجموعات المربعة التالية

$$T = \tfrac{1}{2}(\bar{\mu}_1\dot{\bar{q}}_1^2 + \bar{\mu}_2\dot{\bar{q}}_2^2 + \ldots + \bar{\mu}_n\dot{\bar{q}}_n^2) \qquad (١١ــ٥٥)$$

$$V = \tfrac{1}{2}(\bar{k}_1\bar{q}_1^2 + \bar{k}_2\bar{q}_2^2 + \ldots + \bar{k}_n\bar{q}_n^2) \qquad (١١ــ٥٦)$$

عندئذ تعطى دالة لاكرانج المتحولة ببساطة على النحو التالي

$$L = \sum_k \tfrac{1}{2}(\bar{\mu}_k\dot{\bar{q}}_k^2 - \bar{k}_k\bar{q}_k^2) \qquad (١١ــ٥٧)$$

ومعادلات الحركة التفاضلية المقابلة لها هي

$$\bar{\mu}_k\ddot{\bar{q}}_k + \bar{k}_k\bar{q}_k = 0 \qquad (k = 1,2,\ldots.n) \qquad (١١ــ٥٨)$$

فالحلول هـي

$$\bar{q}_k = \bar{A}_k \cos (\omega_k t + \epsilon_k) \qquad (١١ـ ٥٩)$$

حيث

$$\omega_k = (\bar{k}_k / \bar{\mu}_k)^{\frac{1}{2}}$$

اذن الكميات q_k هي الاحداثيات العيارية والترددات العيارية المرافقة لهـا هي ω_k ، ووفقا للنظرية العامة التي اوردناها تواً ، تعطى الترددات العياريـة من المحدد الاولي ، المعادلة (١١ـ ٥٣) ، يمكن كتابة هذا المحدد بدون معرفة الاحداثيات العيارية ،

ان مسألة ايجاد تحويل الاحداثيات العيارية المعادلة (١١ـ ٥٤) ، للمنظومـة العامة تقتضي تحويل المصفوف الى قطرى ، لقد استنبطنا مايكافي، هذا في معالجـة منظومـة الجسيمين في البند السابق ،

حركة منظومة عامة عند تواجد قوى تضاؤل وقوى دافعة خارجية ، ـ في شرحنا السابق لتذبذب منظومـة عامـة ، اهملنا وجود اى قوى احتكاكيـة ، فاذا تعرضت المنظومـة الى قوى تضاؤل لزجـة تتناسب مع سرع من الدرجة الاولى للجسيمات فيمكننا كتابـة معادلات لاكرانج على النحو التالي

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} + Q_k' \qquad (١١ـ ٦٠)$$

حيث قوة التضاؤل المعممة Q_k' تعطى من

$$Q_k' = - c_{1k}\dot{q}_1 - c_{2k}\dot{q}_2 - \cdots - c_{nk}\dot{q}_n \qquad (١١ـ ٦١)$$

معادلات الحركة التفاضلية الناتجة تماثل الحالة غير المتضائلة [المعادلات (١١ ـ ٥٠)]، ماعدا تواجد الحدود التي تحتوى على $\dot{q}$'s ، في الغالب (ولكن ليس دائمـا)

يمكن في هذه الحالة ايجاد تحويل احداثي عياري بحيث تكون المعادلات التفاضلية الناتجة على النحو التالي

$$\bar{\mu}_k \ddot{\bar{q}}_k + \bar{c}_k \dot{\bar{q}}_k + \bar{k}_k \bar{q}_k = 0 \qquad (١١_٦٢)$$

حيث

$$\bar{q}_k = \bar{A}ke^{-\lambda_k t} \cos(\omega_k t + \epsilon_k) \qquad (١١_٦٣)$$

اذن تتضاءل سعات الصيغ العيارية اسيا مع الزمن . هناك ايضا امكانية حدوث حالة لا تذبذبية مشابهة للتضائل الحرج او فوق المتضائل لحالة البعد الواحد .

اخيرا لحركة المنظومة التي تخضع بالاضافة الى قوى معيدة خطية وقوى تشتت لقوى دافعة خارجية تتغير توافقيا مع الزمن يمكننا التعبير عنها تحليليا بادخال حدود من النوع $Q_{kext} \cos \omega t$ (او $Q_{kext} e^{i\omega t}$) في كل معادلة حركة ، المعادلة (١١_٦٠) . تأخذ معادلات الحركة الناتجة في الاحداثيات المعممة الصيغة التالية

$$\bar{\mu}_k \ddot{\bar{q}}_k + \bar{c}_k \dot{\bar{q}}_k + \bar{k}_k \bar{q}_k = Q_k e^{i\omega t} \qquad (١١_٦٤)$$

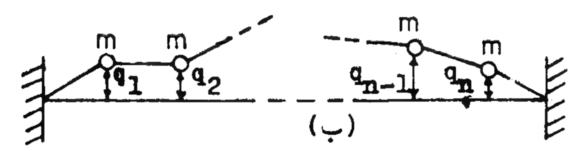
وعلى سبيل المثال ، اذا خضعت المنظومة لقوة دافعة منفردة تتغير توافقيا بتردد يساوى احد الترددات العيارية للمنظومة . عندئذ الصيغة العيارية التي تقابلها تاخذ اكبر سعة في شرط الحالة _ المستقرة . وفي الحقيقة ، اذا كانت ، ثوابت التضاؤل متناهية في الصغر ، فعندئذ الصيغة العيارية التي ترددها يساوى التردد الدافع تكون هي الوحيدة المتهيجة .

١١ـ٧) تذبذب وتر محمل Vibration of a Loaded String

نأخذ في هذا البند بنظر الاعتبار حركة منظومة ميكانيكية بسيطة تتكون من وتر مرن خفيف مشدود الطرفين وقد علق فيه عدد معين n من الجسيمات بمسافات متساوية على طوله وكتلة كل منها يساوى m ۰ المسألة توضح النظرية العامة للتذبذب وتقودنا ايضا بصورة طبيعية الى نظرية الحركة الموجية التي ستعالج باختصار في البند القادم ۰

لنرمز لازاحات مختلف الجسيمات من مواضع توازنها بالاحداثيات q_1 ، q_2 ، .... q_n ۰ وفي الحقيقة ، قد يحدث نوعين من الازاحات ، ازاحة طولية يتحرك فيها الجسيم على طول الوتر وازاحة مستعرضة التي يتحرك فيها الجسيم عموديا على طول الوتر ۰ كما هو موضح في الشكل (١١ـ ٦) ۰ وللسهولة سنفرض الحركة اما ان تكون طولية نقية او مستعرضة نقية ، ولو في الحالة الفيزيائية الحقيقية قد يحدث مزيج من النوعين عندئذ الطاقة الحركية تعطى من

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dots + \dot{q}_n^2\right) \qquad (١١ـ٦٥)$$



الشكل (١١ـ ٦) ترتيب خطي للجسيمات او الوتر المحمل (آ) حركة طولية (ب) حركة مستعرضة

اذا استعملنا الحرف ν ليرمز الى اى جسيم ، عندئذ في حالة الحركة الطولية ، جزء الوتر المشدود بين الجسيمين ν و $\nu + 1$ هو

$$q_{\nu+1} - q_{\nu}$$

اذن الطاقة الكامنة لهذا الجزء من الوتر هي

$$\tfrac{1}{2}K(q_{\nu+1} - q_{\nu})^2$$

حيث K يمثل معامل مرونة مقطع الوتر الذى يربط الجسيمين المتجاورين

لحالة الحركة المستعرضة ، المسافة بين الجسيم ν و $\nu + 1$ هي

$$\left[h^2 + (q_{\nu+1} - q_{\nu})^2\right]^{\frac{1}{2}} = h + \frac{1}{2h}(q_{\nu+1} - q_{\nu})^2 + \ldots$$

حيث h هي مسافة التوازن بين جسيمين متجاورين • عندئذ تمطط جزء الوتر الذى يربط الجسيمين تقريبا هو

$$\Delta \ell = \frac{1}{2h}(q_{\nu+1} - q_{\nu})^2$$

اذن ، اذا كان S يمثل الشد في الوتر ، فالطاقة الكامنة للجزء الذى اخذ بنظر الاعتبار هو

$$S\,\Delta \ell = \frac{S}{2h}(q_{\nu+1} - q_{\nu})^2$$

نستنتج من ذلك ان الطاقة الكامنة الكلية للمنظومة اما ان تكون من النوع الطولي او المستعرض للحركة ويعبر عنها كدالة من الدرجة الثانية على النحو التالي

$$V = \frac{k}{2}\left[q_1^2 + (q_2 - q_1)^2 + \ldots + (q_n - q_{n-1})^2 + q_n^2\right] \qquad (١١ - ٦٦)$$

وفيها

$$k = \frac{S}{h} \qquad \text{(الحركة المستعرضة)}$$

او

$$k = K \qquad \text{(الحركة الطولية)}$$

اذن دالة لاكرانج للوتر المحمل تكون على النحو التالي

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\nu} \left[m\dot{q}_{\nu}^2 - k(q_{\nu+1} - q_{\nu})^2 \right] \qquad (١١_٦٧)$$

ومعادلات لاكرانج للحركة

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\nu}} = \frac{\partial L}{\partial q_{\nu}}$$

عندئذ تصبح

$$m\ddot{q}_{\nu} = -k(q_{\nu} - q_{\nu-1}) + k(q_{\nu+1} - q_{\nu}) \qquad (١١_٦٨)$$

حيث $\nu = 1,2,.....n$

لحل المنظومة السابقة المتكونة من n من المعادلات ، نستعمل الحل التجريبي الذى تفرض فيه $q's$ تتغير توافقياً مع الزمن. ومن المناسب استعمال الصيغة الاسية التالية

$$q_{\nu} = a_{\nu} e^{i\omega t} \qquad (١١_٦٩)$$

حيث a_{ν} يمثل سعة التذبذب للجسيم νth . وعند تعويض الحل التجريبي السابق في المعادلات التفاضلية (١١_ ٦٨) تنتج العلاقة التالية للسعات

$$-m\omega^2 a_{\nu} = k(a_{\nu-1} - 2a_{\nu} + a_{\nu+1}) \qquad (١١_٧٠)$$

هذه العلاقة ستحتوى على نقطتي طرفي الوتر اذا وضعنا

$$a_0 = a_{n+1} = 0 \qquad (١١_٧١)$$

اذن المحدد الاولي يكون

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2+2k & -k & 0 & \cdots & 0 \\ -k & -m\omega^2+2k & -k & \cdots & 0 \\ 0 & -k & -m\omega^2+2k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m\omega^2+2k \end{vmatrix} = 0 \quad (١١_٧٢)$$

والمحدد هو من المرتبة nth فهناك اذن n قيم لـ ω التي تستوفي المعادلة. ولكن ، بدلاً من ايجاد n هذه من الجذور بطريقة جبرية ، نجد ان بامكاننا ايجادها باستخدام المعادلة (١١ــ٧٠) المباشر.

هنا ، نعرّف كمية ϕ المنسوبة للسعات a_ν بالمعادلة التالية

$$a_\nu = A \sin(\nu\phi) \quad (١١_٧٣)$$

وبالتعويض المباشر في العلاقة (١١ــ٧٠) عندئذ نحصل على

$$-m\omega^2 A \sin(\nu\phi) = kA\left[\sin(\nu\phi-\phi) - 2\sin(\nu\phi) + \sin(\nu\phi+\phi)\right] \quad (١١_٧٤)$$

والتي تختصر بسهولة الى

$$m\omega^2 = k(2 - 2\cos\phi) = 4k\sin^2\frac{\phi}{2} \quad (١١_٧٥)$$

او

$$\omega = 2\omega_0 \sin\frac{\phi}{2} \quad (١١_٧٦)$$

حيث

$$\omega_0 = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (١١_٧٧)$$

تعطي المعادلة (١١ــ ٧٦) الترددات العيارية بدلالة الكمية ϕ التي لم نستنتجها حتى الان . وفي الحقيقة سنحصل على نفس العلاقة التي حصلنا عليها لاى من التعويضات التالية $A\cos\nu\phi$, $Ae^{i\nu\phi}$, $Ae^{-i\nu\phi}$ للسعة a_ν ، او اى تركيب خطي منها . على اية حال ، فقط التعويض $a_\nu = A\sin(\nu\phi)$ يستوفي شرط النهاية $a_0 = 0$. ولاجل حساب القيمة الحقيقية للبرمتر ϕ ، وذلك لايجاد الترددات العيارية للوتر المتذبذب ، نستعمل شرط النهاية الآخر اى $a_{n+1} = 0$. وسيستوفي هذا الشرط اذا وضعنا

$$(n + 1)\phi = N\pi \qquad (١١ــ ٧٨)$$

حيث N يمثل عدداً صحيحاً ، اذ نحصل عندئذ على

$$a_{n+1} = A\sin(N\pi) = 0$$

وبايجاد ϕ يمكننا الان حساب الترددات العيارية ، التي تعطى من

$$\omega_N = 2\omega_0 \sin\left(\frac{N\pi}{2n + 2}\right) \qquad (١١ــ ٧٩)$$

وبالاضافة الى ذلك ، نرى من المعادلات (١١ــ ٧٣) و (١١ــ ٧٨) ان السعات للصيغ العيارية تعطى من

$$a_\nu = A\sin\left(\frac{N\pi\nu}{n + 1}\right) \qquad (١١ــ٨٠)$$

هنا القيم $\nu = 1,2,\ldots n$ تمثل جسيما خاصافي ترتيب خطي والقيم $N = 1,2,\ldots\ldots n$ تشير الى الصيغة العيارية التي تتذبذب بها المنظومة .

لقد وضحت الصيغ العيارية المختلفة بيانيا وذلك برسم السعات كما اعطيت من المعادلة (١١ــ ٨٠) . وهذه تقع على منحن جيب كما هو موضح في الشكل (١١ــ ٧)

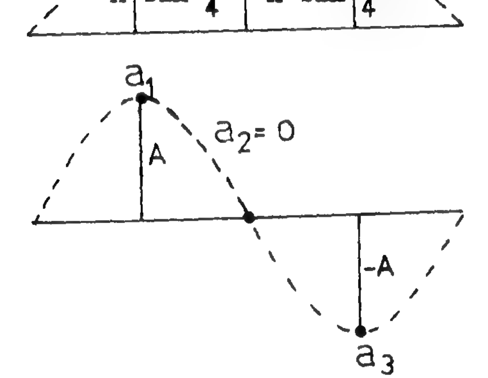
والذى يبين حالة ثلاث جسيمات $n = 3$ ، تعطي الحركـة الحقيقيـة للمنظومـــة ،
عندما تتذبذب بصيغة واحدة نقيـة من المعادلة

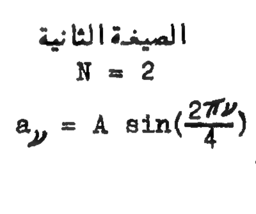
$$q_\nu = a_\nu \cos(\omega_N t) = A \sin\left(\frac{\pi N \nu}{n+1}\right) \cos(\omega_N t) \qquad (١١ــ ٨١)$$

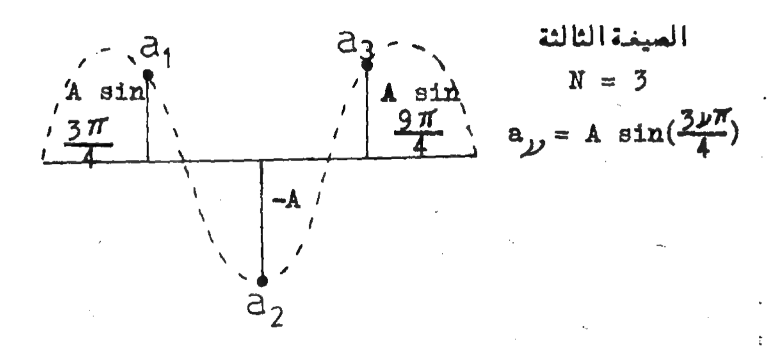
الصيغة الاولى

$N = 1$

$a_\nu = A \sin\left(\frac{\nu\pi}{4}\right)$







الشكل ١١ ــ ٧ الصيغ العيارية لمنظومة متكونة من ثلاثة جسيمات

النوع العام للحركة هو تركيب خطي لجميع الصيغ العيارية . ويمكن التعبير عن هذا كما يلي

$$q_\nu = \sum_{N=1}^{n} A_N \sin\left(\frac{N\pi\nu}{n+1}\right)\cos\left(\omega_N t + \phi_N\right) \qquad (١١ــ ٨٢)$$

حيث القيم A_N و ϕ_N تحسب من الشروط الابتدائية .

في الحالة التي يكون فيها عدد الجسيمات n كبيرا بالمقارنة مع عدد الصيغة N ، بحيث تكون النسبة $N\pi/(2n+2)$ صغيرة ، يمكننا استبدال حد الجيب في المعادلة (١١ــ ٧٩) بالازاحة الزاوية . اذن يكون عندنا تقريبا

$$\omega_N \approx N\left(\frac{\pi\omega_0}{n+1}\right) \qquad (١١ــ ٨٣)$$

وهذا يعني ان الترددات العيارية تكون تقريباً مضاعفات صحيحة لاوطـأ تردد $\pi\omega_0/(n+1)$. وبعبارة اخرى ، يمكننا اعتبار الترددات العيارية المختلفة ، اساسية ، التوافقي الثاني ، التوافقي الثالث ، وهلم جرا . وتتحسن دقة هذه العلاقة التوافقية التكاملية كلما كبر عدد الجسيمات .

١١ــ ٨ تذبذب منظومة مستمرة . معادلة الموجة

Vibration of a Continuous System. The Wave Equation.

لنفرض الحركة لصف من الجسيمات المربوطة والمرتبة بصورة خطية وكان عدد الجسيمات غير محدود في الكبر والمسافة بين كل جسيمين متجاورين متناهية في الصغر . وبعبارة اخرى ، عندنا وتر مستمر ثقيل او قضيب . لتحليل منظومة من هذا النوع ، من الملائم اعادة كتابة المعادلات التفاضلية للحركة لمنظومة محدودة ، المعادلة (١١ــ ٦٨) ، على النحو التالي

$$m\ddot{q} = kh\left[\left(\frac{q_{\nu+1} - q_{\nu}}{h}\right) - \left(\frac{q_{\nu} - q_{\nu-1}}{h}\right)\right] \qquad (١١ـ ٨٤)$$

حيث h تمثل المسافة بين موضعي التوازن لاى جسيمين متجاورين . والان ، اذا كان المتغير x يمثل المسافات بصورة عامة في الاتجاه الطولي ، وكان عدد الجسيمات n كبير جدا بحيث تكون h صغيرة بالمقارنـة مع الطول الكلى ، عندئذ يمكننا كتابة

$$\frac{q_{\nu+1} - q_{\nu}}{h} \approx \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{x=\nu h + h/2}$$

$$\frac{q_{\nu} - q_{\nu-1}}{h} \approx \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{x=\nu h - h/2}$$

ووفقاً لذلك ، يساوى الفرق بين التعبيرين السابقين المشتقة الثانية مضروبة في h ، اى

$$\frac{q_{\nu+1} - q_{\nu}}{h} - \frac{q_{\nu} - q_{\nu-1}}{h} \approx h\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\right)_{x=\nu h} \qquad (١١ـ ٨٥)$$

اذن يمكن كتابة معادلة الحركة على النحو التالي

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \frac{kh^2}{m}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \qquad (١١ـ ٨٦)$$

او

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \qquad (١١ـ ٨٧)$$

حيث استعملنا الاختصار

$$v^2 = \frac{kh^2}{m} \qquad (١١ـ ٨٨)$$

المعادلة (١١ـ ٨٧) من المعادلات التفاضلية المشهورة في الفيزياء النظريـــــة . وتسمى بمعادلة الموجة ذات البعد الواحد . وهي تصادف في مواضع كثيرة مختلفـــــة . تمثل حلول معادلة الموجة نوعا من الاضطراب المتنقل . ومن السهل التحقق من ان حل النوع العام لمعادلة الموجة هو كما يلي

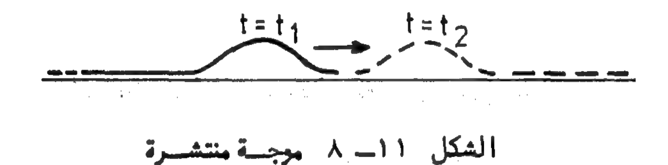
$$q = f(x + vt) \qquad (١١ـ٨٩)$$

او

$$q = f(x - vt) \qquad (١١ـ٩٠)$$

حيث f تمثل اية دالة قابلة للتفاضل ازاحتها الزاوية $x \pm vt$ ، يمثل الحل الاول اضطراباً ينتشر باتجاه x السالب بانطلاق v ، وتمثل المعادلة الثانية اضطراباً يتحرك بانطلاق v باتجاه x الموجب .

وفي مسألتنا الخاصة ، الاضطراب q هو ازاحة جزء صغير للمنظومة من وضع توازنها . الشكل (١١ـ ٨) . قد تكون هذه الازاحة للوتر ضربة تتحرك على طوله وقد



الشكل ١١ـ ٨ موجة منتشرة

تكون منطقة تضاغط او تخلخل لقضيب صلد تتحرك على طوله .

حساب انطلاق الموجة

رأينا في البند السابق ان الثابت K ، لحركة الوتر المحمل المستعرضة ، يساوي النسبة S/h حيث S يمثل الشد في الوتر . وقد تصبح طبعا هذه النسبة للوتر المستمر مالا نهاية عندما تقترب h من الصفر . ولكن اذا ادخلنا الكثافة الخطية او كتلة وحدة الطول ρ ، يكون عندنا

$$\rho = \frac{m}{h} \qquad (١١ - ٩١)$$

ووفقا لذلك ، يمكن كتابة علاقة v^2 ، المعادلة (١١ - ٨٨) ، على النحو التالي

$$v^2 = \frac{(S/h)\ h^2}{\rho h} = \frac{S}{\rho} \qquad (١١ - ٩٢)$$

حيث تختصر h ، عندئذ يكون انطلاق وانتشار الموجات المستعرضة كما يلي

$$v = \left(\frac{S}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (١١ - ٩٣)$$

وفي حالة التذبذبات الطولية ، ندخل معامل المرونة Y الذى يعرف بالنسبة بين القوة والاستطالة لوحدة الطول ، اذن k ، صلابة مقطع صغير طوله h ويعطى من

$$k = \frac{Y}{h} \qquad (١١ - ٩٤)$$

ووفقا لذلك ، يمكن كتابة المعادلة (١١ - ٨٨) على النحو التالي

$$v^2 = \left(\frac{(Y/h)h^2}{\rho h}\right) = \frac{Y}{\rho} \qquad (١١ - ٩٥)$$

مرة اخرى نرى ان h تختصر. اذن انطلاق انتشار الموجات الطولية في قضيب مرن هو

$$v = \left(\frac{Y}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (١١-٩٦)$$

١١-٩ موجات منحنى الجيب Sinusoidal Waves

في دراسة الحركة الموجية ، الحلول الخاصة لمعادلة الموجة

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

حيث q تمثل دالة جيبيه في x , t اى

$$q = A \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(x + vt)\right] \qquad (١١-٩٧)$$

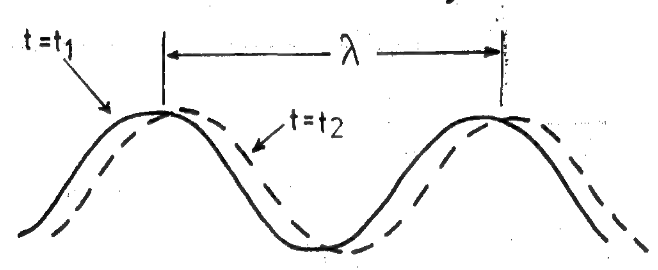
$$q = A \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] \qquad (١١-٩٨)$$

ذات اهمية اساسية . تمثل هذه الحلول اضطرابات منتشرة تتغير فيها الازاحة في نقطة معينة x توافقيا مع الزمن . سعة هذه الحركة هو الثابت A ، والتردد f هو كما يلي

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{\lambda} \qquad (١١-٩٩)$$

علاوة على ذلك ، لقيمة معينة للزمن t ، مثل $t = 0$ ، تتغير الازاحة جيبيا مع المسافة x . المسافة بين ازاحتين متتاليتين في النهاية العظمى او الصغرى هي

الثابت λ ، وتسمي طول الموجة . وتنتشر الامواج الممثلة بالمعادلة (١١ـ ٩٧) باتجاه x السالب وتنتهي تلك التي تمثل بالمعادلة (١١ـ ٩٨) باتجاه x الموجب ، كما هو مبين في الشكل (١١ـ ٩) . وهي حالات خاصة للحل من النوع العام الممثل بالمعادلات (١١ـ ٨٩) و (١١ـ ٩٠) .



الشكل (١١ـ ٩) موجة جيبية

الموجات المستقرة Standing Waves

لما كانت معادلة الموجة ، المعادلة (١١ـ ٨٧) خطية ، يمكننا تكوين اى عدد من الحلول بعمل تراكيب خطية من الحلول المعروفة . احدى التراكيب الخطية الممكنة ذات الاهمية الخاصة هي التي نحصل عليها من جمع موجتين سعتاهما متساويتان وتنتشران في اتجاهين متعاكسين . في رموزنا حل كهذا يعطي من

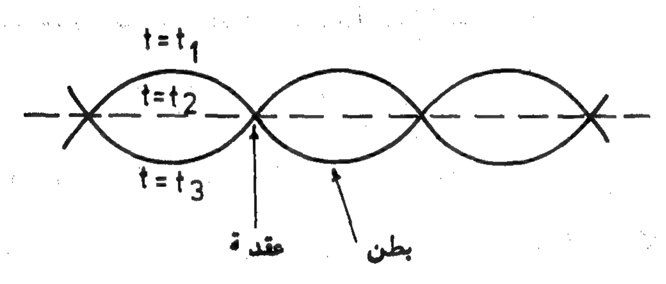
$$q = \frac{1}{2} A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x+vt)\right] + \frac{1}{2}A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right]$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية المناسبة وتجميع الحدود نجد ان المعادلة تختصر الى

$$q = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \cos(\omega t) \qquad (١١ـ ١٠٠)$$

حيث تعطى ω من المعادلة (١١ـ ٩٩) . وتمثل المعادلة السابقة مايسمى بالموجات المستقرة . هنا نرى ان سعة الازاحة لاتبقى ثابتة وانما تتغير مع قيمة x .

اذن عندما تكون... $x = 0,\ \lambda/2,\ \lambda,\ 3\lambda/2,$ تكون الازاحة دائما صفرا اذ يتلاشى حد الجيب في هذه النقاط • وتسمى النقاط التي ازاحتها صفر بالعقد nodes • وبالعكس ، لقيم x التي تكون فيها قيمة حد الجيب المطلقة تساوى واحدا ، اى.. $x = \lambda/4,\ 3\lambda/4,\ 5\lambda/4,..$ تكون سعة التذبذب التوافقي العظمى هي A • وتسمى هذه النقاط بالبطون Antinode والمسافة بين اى عقدتين متتاليتين او بطنين متتاليين تساوى تماما نصف طول الموجة • لقد بينت الحقائق السابقة في الشكل (١١-١٠) •



الشكل (١١-١٠) الموجات المستقرة

تفسير حركة الوتر المحمل بدلالة الموجات المستقرة

اذا قارنا معادلة الموجة المستقرة ، المعادلة (١١-١٠٠) مع حلنا السابق لحركة الوتر المحمل ، المعادلة (١١-٨٢) نلاحظ ان التعبيرين متماثلان • يمكن اظهار التماثل اكثر بملاحظة ان حل الموجة المستقرة سيستوفي شروط الحدود لمسألتنا الاصلية ، اى ان

$$q = 0 : \quad x = 0\ , \quad x = \ell$$

شريطة ان تكون نقاط نهايات الوتر عقد الموجة المستقرة • ونصادف هذا الشرط اذا كان طول الوتر ℓ هو عدد صحيح N لانصاف اطوال الموجة ، اى ان

$$\ell = (n + 1)\ h = N \frac{\lambda}{2} \qquad (١١ــ١٠١)$$

عند حلها لـ λ والتعويض في المعادلة (١١ــ١٠٠) نحصل على

$$q = A \sin \left[\frac{\pi N x}{(n+1)h} \right] \cos (\omega t) \qquad (١١ــ١٠٢)$$

وهذا يتفق مع حلنا السابق ، المعادلة (١١ــ ٨٢) ، اذ في مواضع الجسيمات المختلفة عندنا

$$x_{\nu} = \nu h \qquad (\nu = 1, 2, \ldots . n)$$

اذن يمكن اعتبار تذبذب الوتر المحمل كموجة مستقرة . وكل صيغة عيارية تحتوي على عدد صحيح معين من العقد في نمط الموجة المستقرة .

تمارين

١١ــ ١ . يتحرك جسيم في الجهد ذي البعد الواحد التالي

$$V(x) = k(3x^4 - 2bx^3 - 3b^2x^2)$$

حيث b, k ثوابت موجبة . جد مواضع التوازن واحسب استقرارها .

١١ــ ٢ . يتحرك جسيم في الجهد ذي البعدين التالي

$$V(x,y) = k(x^2 + y^2 - 4bx - 6by)$$

احسب موضع التوازن والاستقرار .

١١ــ٣ . شريطان خفيفان من المطاط ، طول كل منهما الطبيعي (غير المطط) هو ℓ وصلابته k ، ثبتت نهايتاهما العليان بعيدا بعضهما من بعض بمسافة 2ℓ وعلى نفس المستوى . وربطت نهايتاهما السفليتان معا ليحملان جسيما كتلته m .

جد الطاقة الكامنة للمنظومة بدلالة الانخفاض العمودى y للجسيم عن الخط الواصل بين الطرفين العلويين ٠

١١ ــ ٤ ٠ برهن ان موضع التوازن في التمرين السابق يعطى من اكبر جذر موجب للمعادلة التالية

$$u^4 - 2bu^3 + b^2u^2 - 2bu + b^2 = 0$$

حيث $b=mg/(2k\ell)$, $u = y/\ell$ ٠ جد القيمة الحقيقية للحالة $b = 2$ ٠

١١ ــ ٥ ٠ مكعب منتظم كتلته m وطول ضلعه $2a$ ؛ توازن على كرة خشنة نصف قطرها b ٠ اثبت ان دالة جهد الطاقة يمكن التعبير عنها كما يلي ٠

$$V = mg\left[(a + b)\cos\theta + b\theta\sin\theta\right]$$

حيث θ هي الزاوية بين خط التلامس والعمود من مركز الكرة ٠ من هذا ، اثبت ما اذا كان التوازن مستقرا او غير مستقر معتمدا على كون a اقل او اكبر من b على التتالي ٠

١١ ــ ٦ ٠ استقصي الاستقرار للحالة السابقة عندما تكون $a = b$ ٠

١١ ــ ٧ ٠ نصف كرة متجانسة نصف قطرها a تستند على قمة نصف كرة خشنة نصف قطرها b ؛ بحيث كان السطحان المنحنيان متلامسين ٠ اثبت ان التوازن مستقر اذا كانت a اصغر من $3b/5$ ٠

١١ ــ ٨ ٠ يتحرك جسيم كتلته m على خط مستقيم ؛ كالمحور ــ x ؛ الطاقة الكامنة تعطى من ؛

$$V(x) = -kxe^{-ax}$$

حيث a ,k هما ثابتان ٠ جد موضع التوازن وزمن ذبذبات صغيرة للجسيم حول موضع التوازن ٠

١١ـ ٩ • يتحرك جسيم كتلتـه m في جهد التمرين ١١ـ١• جد زمن ذبذبـات صغيرة حول مواضع استقرار التوازن •

١١ـ١٠ • احسب التردد لذبذبات شاقولية حول موضع التوازن للجسيم في التمريـن ١١ـ ٤ •

١١ـ ١١• احسب ذبذبـة المكعب في التمرين ١١ـ ٥ •

١١ـ ١٢• احسب زمـن ذبذبـة نصف الكـرة المتذبذبة في التمرين ١١ ـ ٧ •

١١ـ ١٣• كرة حديدية صغيرة تتدحرج الى الامام والخلف حول موضع توازنهـا داخل تجويف كروى خشن• جد زمن الذبذبـة •

١١ـ ١٤• قضيب منتظم AB طولـه ℓ وكتلتـه m ثبت طرفـه السفلي A بمفصل• وثبت الطرف العلوى B بوتر مرن طولـه الطبيعي $\ell/2$ • وثبت الطرف الآخر للوتـر في نقطـة C التي تقع مباشرة فوق القضيب بحيث تكون المسافة AC مساوية الى 2ℓ • جد الصلابـة k المتطلبة للوتر بحيث يكون الموضع الشاقولي للقضيب هو احد التوازن المستقر• جد كذلك ازمان ذبذبات صغيرة للقضيب حول الموضع •

١١ـ١٥• اكتب الحل الكامل لمتذبذب توافقي مزدوج ، المعادلة (١١ـ٣٧) ، للشروط الابتدائية التالية

$$t = 0 \quad x_1 = A_0 \quad x_2 = 0 \quad \dot{x}_1 = V_0 \quad \dot{x}_2 = 0$$

١١ـ ١٦• جد الحل الكامل للبندول المزدوج الشكل ١١ـ٥ ، للشرط الابتدائـي التالـي

$$t = 0 \; , \; \theta = A \; , \; \phi = 0 \; , \; \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$$

عبرعن هذه الحركة بدلالة الاحداثيات العيارية •

١١ ــ ١٧ • احسب الترددات العيارية للتذبذب التوافقي المزدوج في الشـــكل ١١ ــ ٣ للحالة التي يكون فيها كتلتا الجسيمين غير متساويتين • m_1 , m_2 وبصورة خاصة جد الترددات لحالـة

$m_1 = m$

$m_2 = 2m$

$k' = \frac{k}{2}$

عبر عن النتيجة بدلالة الكمية

$\omega_o = (\frac{k}{m})^{\frac{1}{2}}$

١١ ــ ١٨ • جد الاحداثيات العيارية للتمرين المذكور اعلاه •

تحقق من ان دالـة لاكرانج تختصر الى مجموعات مربعة لهذه الاحداثيـــات •

١١ ــ ١٩ • جد الترددات العياريـة للبندول المزدوج في الشـكل (١١ ــ ٥) للحالة التي يكون فيها طول الوتر العلوى l_1 والطول السفلي l_2 •

١١ ــ ٢٠ • نابض مرن خفيف صلابتـه k ثبت طرفـه العلوى وعلق جسيم كتلته m في الطرف السفلي • ثم ثبت نابض ثاني صلابتـه k في الجسيم وهو بدوره يحمـل جسيما كتلتـه $2m$ في طرفـه السفلي • جد الترددات العيارية للمنظومـة للتذبذبات الشاقولية حول وضع التوازن • جد ايضا احداثيات العياريـة •

١١ ــ ٢١ • نابض مرن ثقيل صلابتـه وكثافتـه منتظمتان يحمل جسيما كتلتـه m • اذا كانت m' كتلـة النابض و k صلابتـه • اثبت ان زمن الذبذبة لذبذبـات الجسيم الشاقولية هـو

$$2\pi \sqrt{\frac{m + (m'/3)}{k}}$$

يبين هذا التمرين تاثير كتلة النابض على زمن الذبذبة ٠

١١ـ ٢٢٠ جد الاحداثيات العيارية في التمرين ١١ـ ١٩ للحالة الخاصة

$$l_1 = 2l \quad , \quad l_2 = l$$

١١ـ ٢٣٠ قضيب كتلته m وطوله a ربط احد طرفيه بنابض طوله b وقد ثبت طرف النابض الثاني ٠ جد الترددات العيارية لتذبذب المنظومة حول وضع التوازن العمودى ٠ افرض ان الحركة في مستوى شاقولي واحد ٠

١١ـ ٢٤٠ جد الاحداثيات العيارية للتمرين السابق عندما تكون $a = b$ ٠

١١ـ ٢٥٠ ضع المعادلة الاولية لحالة ثلاثة جسيمات مزدوجة مرتبة بصورة خطية واثبت ان الترددات العيارية هي نفسها التي تعطيها المعادلة (١١ـ ٨٠)٠

١١ـ ٢٦٠ بندولان بسيطان متماثلان ازدوجا معا بقوة تجاذب ضعيفة جدا تتغير مع مربع للمسافة العكسية بين الجسيمين ٠ اثبت لازاحات صغيرة عن وضع التوازن يمكن اختصار دالة لاكرانج الى نفس صيغتها لتذبذبين توافقيين مزدوجين ٠ اثبت ايضا انه اذا بدأ إحد البندولين متذبذبا وكان الآخر ساكنا ، عندئذ سيتحرك البندول الثاني ويكون الاول ساكنا وهكذا ٠

١١ـ ٢٧ ٠ جزيئة ثلاثية خطية (مثل CO_2) تتكون من ذرة مركزية كتلتها m وذرتان اخريان كتلة كل منهما m' ٠ والذرات الثلاث تقع على خط مستقيم ٠ ضع دالة لاكرانج لهذه الجزيئة على فرض ان الحركة تحدث في خط مستقيم

(المحور ـ x) وجد الصيغ العيارية والترددات العيارية . افرض ان القوة بين كل ذرتين متجاورتين يمكن تمثيلها بنابض صلابته k .

١١ ـ ٢٨ . ضع الصيغ العيارية لحالة اربعة جسيمات مرتبة بصورة خطية . جد القيم العددية لنسب الترددات العيارية الثانية والثالثة والرابعة الى اوطأ او التردد العياري الاول .

١١ ـ ٢٩ . وتر خفيف طوله الطبيعي ℓ وصلابته k مط الى طول $\ell + \Delta\ell$ وحمل بعدد n من الجسيمات رتبت على مسافات متساوية على طول الوتر . فاذا كانت m الكتلة الكلية لجميع الجسيمات n . جد انطلاق الموجات الطولية والمستعرضة في الوتر .

١١ ـ ٣٠ . حل التمرين السابق للحالة التي يكون فيها الوتر ثقيلا كثافته الخطية ρ بدلا من ان يكون محملا .

الفصل الثاني عشـر

النظرية النسـبية الخاصـــــة

The Special Theory of Relativity

قدمت النظرية النسبية الخاصة هنا بصورة مختصرة ، وهي تطوير مهم للفيزيـــــاء الحديثة كما ان لها تطبيقات تمتد من ديناميك النوويـة الى الميكانيك السماوى وقـد اثرت هذه النظرية بعمق على مفاهيمنا للفضاء والزمن ٠

(١٢ــ ١) ملاحظات تمهيدية Introductory Remarks

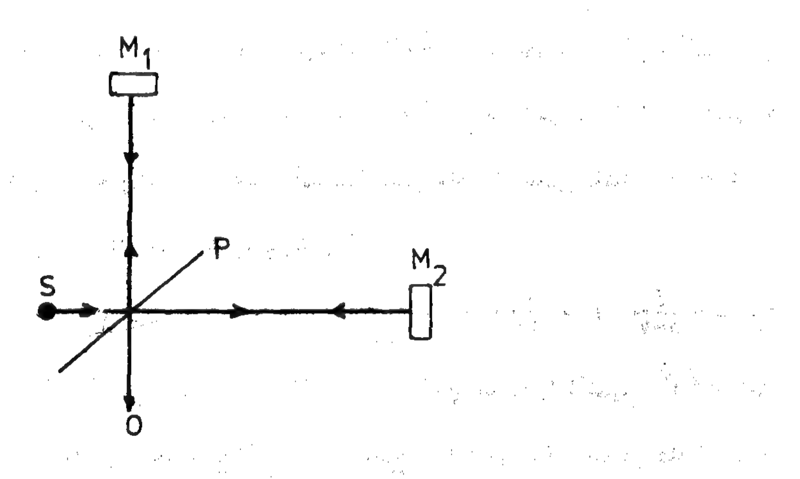
ان احدى التطورات المهمة التي حدثت في تاريخ الفيزياء خلال الجزء الاخيـــر من القرن التاسع عشر هي عندما اعلـــن جيمـــس كـــلارك ماكســـــــويل ، James Clerk Maxwell نظريتـه الكهرومغناطيسية للضوء في عام ١٨٦١ ٠ اذ نجحت هذه النظرية في توحيد كميات ضخمـة من المعارف التجريبية الخاصة في انتشـار الضوء خلال المادة بدلالة خواص كهربائية ومغناطيسية معروفـة لاوساط ماديـــــــة ٠

ولكن ، بالرغـم من نجـاح النظريـة الكهرومغناطيسـية العظيـم كما قدمهـــا ماكسـويل في بادىء الامر فانها كانت تحتوى على صورة مشوشـة عن فرضيـة كانـــت سائدة في ذلك الوقت حول وسط يتخلل كل شيء يسمى بالاثير ٠ وان المحتويـــــات الرياضيـة والاستنتاجات النظريـة لم تتطلب فكـرة الاثير ولكـن تواجـده الفيزيائـــي كان يعتبر ضروريـا لانتشار الضوء خلال الفضاء الفارغ حتى ان ماكسويل ارتأى في سـنة ١٨٧٩ انـه قد يكون من الممكن حساب حركـة المنظومـة الشمسية خلال الاثيـــر بملاحظـة التغييرات في انطلاق الضوء الظاهرى وذلك باستخدام طريقـة رومـــــر Romer القديمـة المتضمنـة خسوف اقمار كوكب المشترى ولسوء الحظ لم تكـــن البيانات الفلكيـة كافيـة الدقـة لهذا الغرض ٠

(١٢ــ ٢) تجربـة مكلسن ــ مورلي The Michelson-Morley Experiment

في هذا الوقت اصبح الفيزيائي الامريكي مكلسن الذى قاس انطلاق الضوء قبل هـذا

الوقت بدقة متناهية مولعا بفكرة امكانية الكشف عن حركة الارض خلال الاثيـر بواسطة الموجات الضوئية ، فصمم لهذا الغرض الخاص المدخال الضوئي Optical interferometer الذى يحمل اسمه الآن ويستعمل في قياسات متنوعة كثيرة اخـرى ويبين الشكل (١٢ ــ ١) رسما تخطيطيا لـه • تنقسم حزمة ضوئية من المصـدر S الى حزمتين بواسطة لوح زجاجي P هو عاكس جزئي للضوء • فتنتقل احدى الحزمتين الى المرآة M_1 التي تعكس الضوء مرة ثانية الى P والحزمة الثانية تمر مباشرة خلال P الى المرآة M_2 التي تعكس الضوء ايضا الى P • عندئذ تتحد الحزمتان المنعكستان في P وينعكس جزء من الضوء الى عين المشاهد في O •



الشكل ١٢ ــ ١ رسم تخطيطي لتجربة مكلس ــ مورلـي

وبسبب تداخل الامواج الضوئية الائتلافي والتقوية ، يشاهد نمط من الحـزم المتداخلة المضيئة والمظلمة او نمط هدبي في مجال الرؤيـا • ويمكن جعـل نمـط التداخل يتغير بهدبيـة واحدة اذا ازيحت اى من المرآتين M_1 او M_2 مسافـة مساوية لربع طول موجـة ضوئيـة • ان ازاحـة مساوية لواحد من المليون من الانـج

تقابل ازاحة مساوية لـ $\frac{1}{20}$ من طول الموجة او يمكن الكشف بسهولة عن $\frac{1}{5}$ تغيير مدبي ·

افرض الآن ان كلا المرآتين على نفس المسافة d من السفيحة P · فاذا كان الجهاز لايتحرك خلال زمن انعكاس الضوء الى الامام والخلف ، عندئذ تعود الموجتان الى P في نفس الوقت ويلتقيان بنفس الطور في O · ومن ناحية ثانية ، افرض ان الجهاز يتحرك بسرعة $\vec{v}$ باتجاه الحزمة الابتدائية من S · فالزمنان اللذان تستغرقهما الموجتان الجزيئتان بسفرتيهما المتتاليتين لن يكونا متساويين اذا فرضنا ان الضوء يسير بانطلاق ثابت c خلال الاثير · وهذه الحالة مشابهة لحالة سباحين ، احدهما يسبح ضد التيار وباتجاهه والآخر يعبر من جانب التيار الى الجانب الآخر ثم يعود · اذن الموجة التي تذهب الى M_2 تسير بانطلاق $c-v$ ، بالنسبة الى الجهاز ، وعند عودة هذه الموجة تسير بانطلاق نسبي مقداره $v + c$ · فالزمن الكلي t_2 للذهاب والاياب يكون اذن

$$t_2 = \frac{d}{c-v} + \frac{d}{c+v} = \frac{2cd}{c^2-v^2} \qquad (١٢ــ ١)$$

وبعكس ذلك ، فان الموجة التي تسير الى M_1 يكون انطلاقها النسبي $(c^2-v^2)^{\frac{1}{2}}$ بالنسبة الى الجهاز من قانون جمع المتجهات للسرع · فالزمن t_1 للسفرة عندئذ يكون

$$t_1 = \frac{2d}{(c^2-v^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (١٢ــ ٢)$$

ووفقا لذلك ، الفرق في الزمن Δt يعطى من

$$\Delta t = t_2-t_1 = 2d\left[\frac{c}{(c^2-v^2)} - \frac{1}{(c^2-v^2)^{\frac{1}{2}}}\right] = \frac{dv^2}{c^3} + \cdots \qquad (١٢ــ ٣)$$

في هذه الفترة الزمنية يسير الضوء مسافة

$$\Delta \ell = c\, \Delta t = d \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \ldots$$

هذا هو فرق الطريق (الفعلي) ويقابل الكسر

$$\frac{\Delta \ell}{\lambda} = \frac{d}{\lambda} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \ldots \qquad (١٢ ـ ٤)$$

لطـول موجـة الضوء λ ٠

لحركـة الارض المداريـة حول الشمس ، تكون قيمـة v/c حوالي ١٠ ـ ٤ ٠ وهذا يساوى فرق مسار فعلي يقدر بحوالي $\frac{1}{٦}$ طول موجـة ضوء الصوديوم الاصفـر ، $\lambda = 6x10^{-5}$ cm لمسار طولـه ١٠ امتار ٠(وفي الحقيقـة ان قيمة v/c السابقة هي القيمـة الصغرى المتوقعـة لان قيمـة v/c للمنظومـة الشمسية التي تنتج عـن دوران المجرة تقدر بحوالي ١٠ ـ ٣ ٠ وهذا سيرفع قيمـة فرق المسار الفعلي السابقـة بمقدار مرتبتين) ٠

كان مكلسن يأمل في تجاربـه ايجاد تغيير هدبي عند دوران المدخال بزاويـة ٩٠° وهكذا يسبب تأثير (رياح الاثير) الناتج بسبب حركة الارض تناوبا بين مسـارى الضوء ٠ لقد اجرى العالم المذكور تجربة اولية سنة ١٨٨١ باستعمال مسار طولـه ١ر٢ متر ٠ فكانت النتيجة سالبة ٠ ومع ذلك ، فان الكشف عن التغيير الهدبي المتوقـع بسبب حركة الارض المدارية ، يكاد يكون مستحيلا ٠ وبعد ست سنوات وبالتعاون مـع مورلي E.W. Morley بني مدخال محسن مساره الضوئي الكلي يساوى ١١ متـر ٠ وقد نصب الجهاز على قالب من الكرانيت طاف في بركـة من الزئبق ، فلوحظ التداخـل الهدبي باستمرار عند دوران القالب بزاويـة ٣٦٠° ٠ مرة ثانية وكما في التجربـة السابقة لم يلاحظ اى تغيير هدبي يمكن قياسه ولو هذه المرة ٠ كان المتوقـع الكشـف

بسهولة عن التغيير بسبب اعتبار انطلاق الارض المدارى فقط ٠

وقد جاءت النتائج السالبة لهذه التجارب للكشف عن حركة الارض خلال الاثير مفاجأة غير متوقعة لعلماء العالم ٠ لان الفكرة الثابتة عن وجوب انتشار الضوء في وسط ما خلال الفضاء اصبحت مرتابا في امرها ٠ وبدلا من ان يترك العلماء مفهوم الاثير حاول عدد من الرياضيين ايجاد تفاسير بديلة ٠

ومن اشهر هذه المحاولات التي قام بها كل من لورنس Lorentz وفتز جيرالد Fitzgerald منفردا عن الآخر في عام ١٨٩٢ ٠ فقد فرضا ان الجسم الصلد تتقلص ابعاده الموازية لحركته خلال الاثير بنسبة ٠ $(1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$. وهذه الكمية في التقلص المعروفة بتقلص لورنس ـ فتزجيرالد تعادل المرات التي تجتازها مسارات الضوء في تجربة مكلسن ـ مورلي ولذلك لايظهر تغيير هدبي ٠

هذه الطريقة بالذات ليست مرضية لشرح الحقائق العملية لان الفرضية لم تكن عرضة للتحقيق المباشر ٠ ان اى محاولة لقياس تقلص لورنس ـ فتزجيرالد بطرق القياس التقنية الاعتيادية محكوم عليها بالاخفاق لان الجهاز يتقلص مع الجسم المراد قياسه ٠

ويجب ان نذكر بهذا الخصوص تجربة اخيرة اجريت سنة ١٩٣٢ من قبل كندى R.J. Kennedy وثورندايك E.M. Thorndike انهما استعملا في تجربتهما مدخالا لمكلسن فيه طولا مسارى الضوء مختلفان ٠ وقد لوحظ التداخل الهدبي لفترة زمنية طويلة (اشهر) وكان المدخال خلال هذه الفترة مثبتا في المختبر ولكنه طبعا يدور مع الارض ٠ وكما في تجربة مكلسن ـ مورلي لم تلاحظ اى ازاحة هدبية ٠

والان ، اذا قبلت فرضية تقلص مكلسن ـ مورلي كتفسير لنتيجة مكلسن ـ مورلي السالبة ، عندئذ تبقى النتيجة السالبة لتجربة كندى ـ ثورندايك دون تفسير ٠

فمن الضروري عندئذ وضع فرضيــة بخصوص قياس الزمن اذا استبقينا فكـرة الاثيـــر . هذه الطريقــة لتفسير الحقائـق التجريبية بصورة مختلفــة عند ظهورها تبدو غيـر مرضيــة تماما خصوصا اذا كان بالامكان ايجاد معالجــة نظريــة عامــة وسهلــة . ولهذه الحالة وجدت نظريــة كهذه وهي النظريــة النسبية الخاصة .

١٢ــ ٠٣ فرضيات آنشتين في النسبية الخاصة

Einstein's Postulates of Special Relativity

افترض آنشتين في سنة ١٩٠٥ ان مفهوم الاثير والحركة " المطلقــة " فيــه لامعنى لهما كليا . وبتبصر مدهش نبذ فكرة الاثير كشـــيء غير ضروري وعوضــا عن ذلك عرض اسلوبا جذريا وجديدا للبحث يستند على فرضيتين اساسيتيــن .

١ــ تصح قوانين الفيزياء بصورة متساوية في جميع المحاور المرجعية للاستمراريـــة Inertial reference systems .

٢ــ يكون انطلاق الضوء ثابتا لجميع المشاهدين بغض النظر عن ايــة حركــة نسبية للمصدر او المشاهد .

وهاتان الفرضيتان تكونان اساس النظرية النسبية الخاصة (١) .

والفرضية الاولى هي امتداد لشرحنا السابق عن المحاور المرجعية للاستمراريـــة في البند (٥ ــ ٢) لتضمنها جميع قوانين الفيزياء وليس فقط قوانين نيوتن للحركـــة

---

(١) عالجــت النظريــة النسبية العامــة التــي صاغهــا آ نشــتين ســنة ١٩١٦ المحاور المرجعيــة غير المســتمرة . وقد تركـزت بصــورة كبيــرة علــى ظاهــرة الجاذبيـــة .

كما ان آنشتين لم ينسى قوانين الكهرومغناطيسية حيث اورد في بحثه مايلـــي (٢) .
ان المحاولات الفاشلة لاكتشاف ايــة حركــة للارض بالنسبة " للوسط الخفيف" توحـي ان ظاهرة الكهرومغناطيسية كالميكانيك لايمتلكان خواص تتعلق بفكرة السكون المطلق . واستمر آنشتين في نفس المقال الخاص بعمله المشهور ليؤكد على فرضيته الثانيـــة والتي هي اروع الفرضيتين . كما انــه وضع فرضيــة اخرى تظهر وكأنها متناقضــة مــع السابقة وهي ان الضوء ينتشر دائما في الفضاء الخالي بسرعة ثابتــة تساوى c وهـــي لاتعتمد على حركــة مصدر الضوء .

١٢ــ ٤) تحويلات لورنتز The Lorentz Transformation

سنطبق في هذا البند فرضيات النسبية لاستنباط المعادلات الرياضية لتحويـــل قياسات الموضع الفضائي والزمن بين مشاهدين B,A يتحرك كل منهما بالنسبة الى الآخر بسرعة ثابتة v . ان النتيجة ، التي تعرف بتحويلات لورنتز سوف تكـــــون الاساس لاستنتاجات اخرى من الفرضيات (٣) .

لنمثل محاور A بـ Oxyz ومحاور B بـ $O'x'y'z'$ ولتسهيل البحث سنفرض ان المحوران Ox و $O'x'$ وهلم جرا متوازيان على التتالي ، وان الحركـة النســبية تكون باتجاه x ، اى ان ، المحاور التي تحمل الفتحــة تتحرك بالاتجاه x بانطلاق v بالنسبة للمحاور التي لاتحمل الفتحــة (الشكل ١٢ــ ٢) .

---

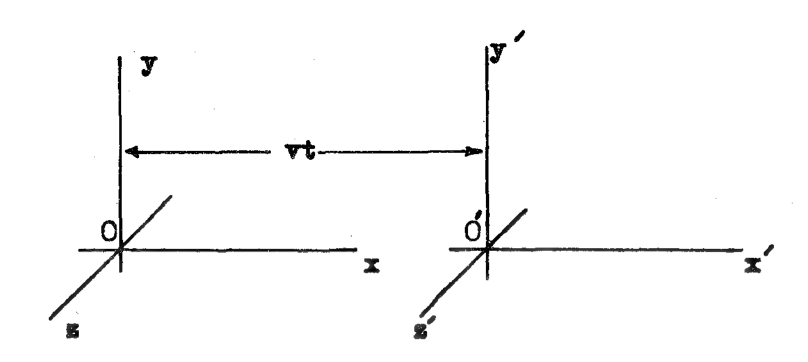
(٢) A. Einstein Ann. Physik, 17, 891 (1905), English Translation by W. Perrett and G.B. Jeffery in the Principle of Relativity, Dover, New York, 1923.

(٣) لورنتز هو اول من استنبط التحويلات سنة ١٩٠٤ من فرضيات الكهرومغناطيســية ولكن آنشتين اكتشفها بصورة مستقلة وبين انها تنتج من فرضيات النســـــبية .

الآن اذا كانت نقطتا الاصل O و O´ متطابقتان في الزمـــــن $t = 0$ ، عندئذ المسافة OO´ تساوى vt • ووفقا لعلم الحركـة المجردة النيوتـــــوني او الكلاسيكي تكون معادلات التحويلات عندئذ

$$x = x' + vt$$
$$y = y'$$ (١٢ـ٥)
$$z = z'$$
$$t = t'$$

المعادلة $t = t'$ تعبر عن المساواة المفروضة لقياس الزمن للمشاهدين •(يستخدمان ساعتين متطابقتين) بعض الاحيان يسمى التحويل المذكور اعلاه بتحويل غاليلو •



الشكل (١٢ ــ ٢) : منظومتا المحاور في حركـة نســبية

افرض اننا نعتبر تجربة خاصة ينبعث فيها وميض ضوئي من النقطة O في اللحظة $t = 0$ عندما تكون نقطتا الاصل O و O' متطابقتين . ستنتشر الموجة الضوئية في جميع الاتجاهات بانطلاق c . يمكن اذن تمثيل جبهة الموجة الضوئية بكرة متمددة تعطي بالمعادلة التالية

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \qquad (٦_١٢)$$

ووفقا لتحويلات غاليلو، تكون معادلة جبهة الموجة في المحاور التي تحمل الفتحة على النحو التالي

$$(x' + vt')^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \qquad (٧_١٢)$$

هذه معادلة كرة نصف قطرها ct' متمركزة في النقطة $x' = -vt'$ على المحور x' .

الآن ، اذا كانت المعادلة المذكورة اعلاه صحيحة ، تتحرك جبهة الموجة بانطلاق $c - v$ بالاتجاه الموجب للمحور x' وبانطلاق $c + v$ باتجاهه السالب. وواضح ان هذا يناقض الفرضية الثانية . لانه وفقا لهذه الفرضية يجب ان تنتشر جبهة الموجة بسرعة c في منظومتي المحاور . وبعبارة اخرى ، يجب ان يرى الشاهد B ايضا موجة منتشرة في جميع الاتجاهات بانطلاق c . فيجب ان تكون معادلة جبهة الموجة في المحاور التي تحمل الفتحة على النحو التالي

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \qquad (٨_١٢)$$

بدلا من المعادلة (١٢_٧)

نبغي الآن ايجاد تحويل يستنتج المعادلة (١٢_ ٨) من المعادلة (١٢_ ٦) .

والتحويل الخطي (٤) ، لحسن الحظ من النوع العام التالي

(١٢ـ ٩)

$$x' = a_{11}x + a_{12}t$$

$$t' = a_{21}x + a_{22}t$$

ستعطي النتيجـة المطلوبـة بعد اختيار مناسب للمعاملات ، لما كانت الحركة النسبيـة باتجاه xx' فيمكننا ان نفرض $y'=y$, $z'=z$ وبالتعويض في المعادلـة (١٢ـ ٩) نحصل على ٠

(١٢ـ١٠)

$$(a_{11}x + a_{12}t)^2 + y^2 + z^2 = c^2(a_{21}x + a_{22}t)^2$$

هذه المعادلة يجب ان تكون متطابقـة مع

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

اذن عند فك ومساواة معامل الحدود المتناظرة ، نجد ان

$$a_{11}^2 - c^2a_{21}^2 = 1 , \quad a_{11}a_{12} - c^2a_{21}a_{22} = 0$$

(١٠٢ـ ١١)

$$a_{12}^2 - c^2a_{22}^2 = -c^2$$

الآن ، عندنا اربعة مجاهيل ولكن ثلاث معادلات فقط٠ ولكن نعلم ان النقطة $x'=0$ هي نقطـة الاصل O' ، التي تتحرك بانطلاق v ٠ باتجاه x٠

---

(٤) اذا كان التحويل غير خطي ، عندئذ تظهر الحركة المنتظمة في احدى المحـاور معجلـة لمشاهد في المحاور الثانيـة٠ هذه ليست حقيقيـة لان كل مـن منظومتـي المحاور غير معجلـة بالنسبة الى الاخرى ٠

اذن المعادلة

$$x' = 0 = a_{11}x + a_{12}t \quad (12-12)$$

يجب ان تختصر الى

$$x = vt$$

وبذلك نحصل على معادلة رابعة هي

$$v = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \quad (12-13)$$

من المعادلتين (١٢ــ ١٢) و (١٢ــ ١٣) نجد بعد استخدام قليلا من الحسابات الجبرية ان المعاملات هي

$$a_{11} = a_{22} = \gamma$$

$$a_{12} = -\gamma v \quad (12-14)$$

$$a_{21} = -\frac{\gamma v}{c^2}$$

حيث

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (12-15)$$

اذن التحويل التالي يستوفي متطلباتنا وهو ان معادلة جبهة الموجة المنتشرة هي نفسها في منظومتي المحاور

$$x' = \gamma (x - vt)$$

$$y' = y \quad (12-16)$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

هذا هو تحويل لورنتز الذى يعبر عن الجوهر الرياضي للنظرية النسبية الخاصـــة ٠ ويمكن البرهنـة بسهولة على ان معكوس التحويل السابق هو

$$x = \gamma (x' + vt')$$
$$y = y' \qquad (١٢ــ١٧)$$
$$z = z'$$
$$t = \gamma (t' + \frac{vx'}{c^2})$$

نرى انـه اذا كانت v صغيرة جدا بالمقارنـة مع انطلاق الضوء ، عندئذ γ تسـاوى واحداً تقريباً ويختصر تحويل لورنتز الى تحويل غـاليلو في الغايـة ٠

(١٢ــ ٥) نتائج تحويل لورنتز ــ تقلص الطول وتمديد الزمن

Consequences of the Lorentz Transformation:

Length Contraction and Time Dilatation

هناك استنتاجان مدهشان ومباشران يمكن ان نستلمهما اذا فرضنا ان تحويـل لورنتز يصح فيزيائيا ٠ اعتبر اولا قياس الطول لقضيب ٠ لنفرض ان القضيب مثبت فـي المحاور التي تحمل الفتحـة وواقع على طول المحور $O'x'$ ٠ عندئذ طول القضيـب كما يقيسـه المشاهد B ، هو

$$L_0 = x_2' - x_1'$$

حيث x_1' و x_2' هما احداثيا طرفي القضيب ٠ الآن تتحول الكمية $x_2' - x_1'$ وفقا لتحويل لورنتز كالاتي

$$L_0 = x_2' - x_1' = \gamma \left[(x_2 - vt_2) - (x_1 - vt_1)\right]$$
$$= \gamma \left[L - v(t_2 - t_1)\right]$$

حيث $L = x_2 - x_1$ ٠ على فرض ان المشاهد A يقيس موضعي طرفي القضيب

في نفس الوقت (بالنسبة لـه) ، اى ان ، $t_2 = t_1$ ،عندئذٍ تختصر المعادلــة المذكورة اعلاه الى

$$L_o = \gamma L$$

او

$$L = \frac{L_o}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\; L_o \qquad (١٨_١١)$$

اذ ن يقول المشاهد A ان طول القضيب هو اقصر مما يقولـه المشاهد B • ويظهـر طول القضيب المتحرك قد قصر بنسبة $1/\gamma$ • هذا القصر الظاهرى يساوى عدديــا تقلص لورنتز ــ فتزجيرالد • ولكن مفهومي التقلصين مختلفا ن • لقد اعتبر تقلص لورنتز ــ فتزجيرالد حقيقا ولو انـه ظاهرة لايمكن قياسها ، بينما المفروض هو امكانيـة قيــاس التقلص النسبي ، ولو انـه تاثيرظاهرى •

ثم لنقارن فترات زمنيــة ، كما تحسب من تكتكــات ساعــة كبيرة ، يقيسهـــا المشاهدا ن ، لنفرض ان الساعــة في حالة السكون في المحاور التي تحمــل الفتحــة • فالفتــرة الزمنيــة T_o بين تكتكتين متتاليتين $t' = t'_1$ و $t' = t'_2$ هـــي

$$T_o = t'_2 - t'_1$$

او

$$T = t_2 - t_1 = \gamma \left[(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)\right]$$
$$= \gamma T_o + \gamma \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)$$

لما كانت الساعة في حالة سكون في المحاور التي تحمل الفتحــة ، عند ئذ

$$x'_2 - x'_1 = 0$$

وفقا لذلـــك

$$T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (١٢ _ ١٩)$$

اذ ن لايتفق المشاهدان على الفترات الزمنيـة بين التكتكات • المشاهد A يقـــول ان الفترات هي اطول مما يقولـه B • فالساعة المتحركة تظهر بانها تنقص فـــي الزمن بنسبة γ •

وفي المناقشات السابقة لايهم ابدا ان يسمى اي من المنظومتين بالمحاور المتحركة• وقد يكون القضيب المقاس والساعة منقولين في المحاور التي تحمل الفتحـة او التـــي لاتحمل الفتحـة واى من المشاهدين قد يجد ان القضيب الآخر ظهر اقصر والسـاعـة الاخرى ظهرت مقصرة في الزمن• وقد تبدو هذه التعابير لاول وهلـة متناقضة ولكـــن الامر ليس كذلك • لانها نتائج مباشرة لتحويل لورنتـز الذى يستنبط بدوره من فرضيات النسـبية •

قد يكون من النافع ملاحظة ان تحويل لورنتز يقتضي ضمنيا ان المسافة المحضـــة او الفترة الفضائية في احدى المنظومتين تظهر كتركيب من مسافة وفترة زمنيـة في المنظومة الاخرى• وبالتماثل تظهر فترة زمنيـة محضة في منظومـة كتركيب لفترة فضائية وزمنيـــة في المنظومـة الاخرى •

التواقت ونسـبية الزمـن

Simultaneity and the Relativity of Time

تبين الملاحظات السابقة ماقد يكون الفرق الاساسي بين نسبية نيوتن ونسبية آنشتين • خصوصاً • اذا كانت $t_1 = t_2$ في احدى المحاور المرجعية • بحيث تمثل الرمـــوز السفلية 2, 1 الى حدثين متزامنيـــن في تلك المحاور وليس من الضرورى ان تكون القيم المقابلة للزمنين t'_2 , t'_1 متساوية في محاور مرجعية مختلفـة • وبعبارة اخرى•

يتحقق مفهوم التوقيت فقط في محاور مرجعية خاصة • فاذا تقبلنا قواعد النظرية النسبية الخاصة ، فعلينا ان نتخلى عن فكرتنا الاولية والحدسية وهي ان الفضاء والزمن متميزان ومطلقان •

١٢ ـ ٦) الفضاء والزمن **Space-time**

في محاور مرجعية معينة مكونة من مجموعة محاور ومنظومة ساعات لقياس الزمن ، فمجموعة القيم (x, y, z, t) يعين موضع في الفضاء تعيينا كاملا في فترة زمنية خاصة تسمى حدث event • ويمكن اعتبار الحدث نقطة في اربعة ابعاد مستمرة تسمى الفضاء والزمن • ويمكن تمثيل الحدث الماضي والحاضر والمستقبل لجسم متحرك بمنحني واحد في الفضاء والزمن • ويسمى هذا المنحني بالخط العالمي للجسم •

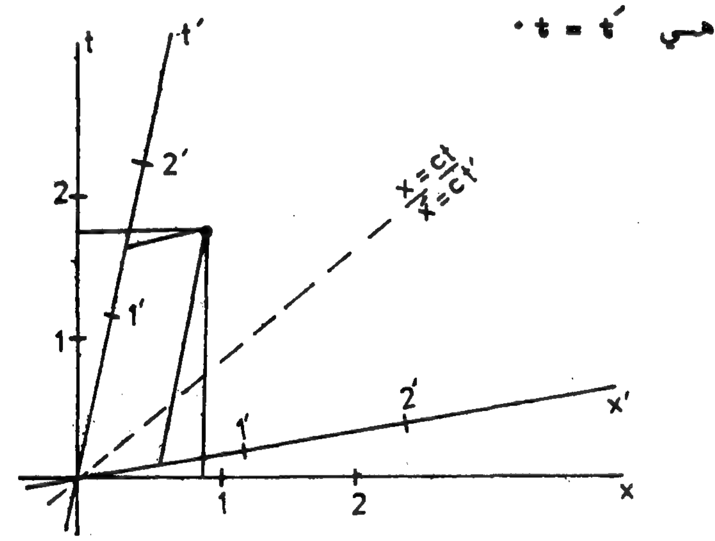
وواضح من تحويلات لورنتز ان تجزئة الفضاء • والزمن المستمر الى فضاء وزمن يعتمد على المحاور المرجعية الخاصة ، اى على حركة المشاهد • والمشاهدون المختلفون يجزؤنها بطرق مختلفة •

منحنيات الفضاء والزمن **Space-time Diagrams**

لكي نوضح الخطوط العالمية بيانيا ، من الضروري طبعا ، حذف بعد واحد على الاقل من الابعاد الفضائية • ابسطها اخذ احداثي فضائي واحد والزمن ، بحيث يكون بياني الخط العالمي عبارة عن رسم اعتيادى للمسافة ضد الزمن • عندئذ ، كما في الحركة المجردة غير النسبية ، تكون الخطوط العالمية للجسيمات المتحركة بسرعة ثابتة مستقيمة ، بينما تكون الخطوط العالمية للحركة المعجلة منحنية •

ان تمثيل تحويلات لورنتز على منحني الفضاء والزمن يلقي الاضواء الكاشفة على ذلك • لنبدأ بالاحداثيين x و t للمحاور التي لاتحمل الفتحة كخطين متعامدين متقاطعين •

عندئذ نحصل على المحاور التي تحمل الفتحة كما يلي • اولا ، المحور ـ x' هو ذلك الخط الذى يقابل $t' = 0$ • اذن ، نرى من تحويلات لورنتز ان معادلة هذا الخط هي $t = vx/c^2$ بدلالة المحاور التي لاتحمل الفتحة • ثانيا ، للاحداثي t' عندنا $x' = 0$ • وتعطي تحويلات لورنتز $x = vt$ لهذا الخط • اذن ، تميل المحاور التي تحمل الفتحة عن المحاور التي لاتحمل الفتحة كما هو مبين في الشكل ١٢ـ ٣ • بالمناسبة ، نلاحظ ان تحويلات غاليلو تعطي ايضا $x = vt$ للمحور ـ t' ، ولكن المحور ـ x' ينطبق على المحور ـ x لان تحويلات غاليلو للزمن هي $t = t'$ •



الشكل (١٢ـ ٣) احداثيات حدث في نظامين محاور مختلفين

والفرق الرئيسي بين تحويلات غاليلو ولورنتز هو المقاييس • تعين علامات القياس على المحاور التي تحمل الفتحة من تحويلات لورنتز على النحو التالي

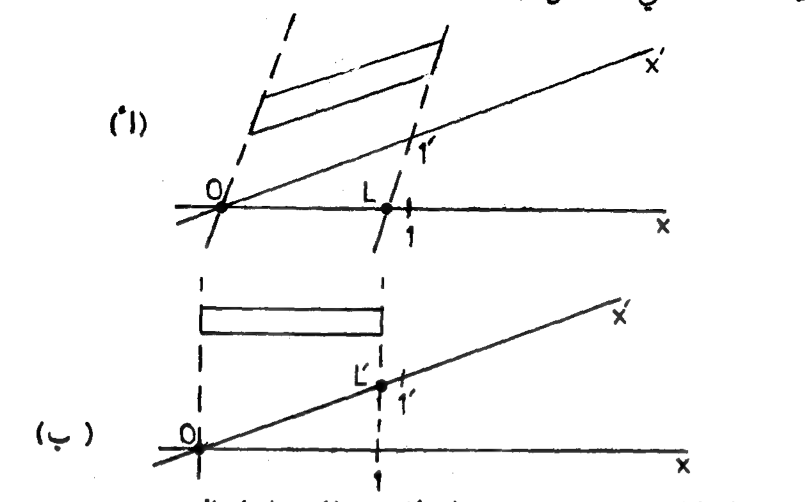
العلامة $t'=0,\ x' = 1$ موضعها في النقطة $x = \gamma$ ،1 ،

$t=(\gamma v/c^2).1$ ، بالتماثل ، موضع علامة مقياس الزمن $x'=0$ ، $t'=1$ في النقطة $t=\gamma.1,\ x=(\gamma v).1$ ، بالاستمرار على هذا النحو ، يكون من الممكن بناء مجموعة كاملة من علامات المقياس وشبكة خطوط محزز متقاطعة تعطي احداثيات اى حدث في اى محور من المحاور المرجعية التي تحمل الفتحة او التي لاتحملها . وبصورة خاصة ، لما كان انطلاق الضوء ثابتا في جميع المنظومات المرجعية ، عندئذ يكون للخط العالمي لوميض ضوئي نفس المعادلة في اى من منظومتي المحاور ($x'=ct',\ x=ct$) كما هو مبين في الشكل بالخط المنقط .

لقد وضح تقليص الطول وتمديد الزمن بسهولة في مخطط الفضاء والزمن . خذ ، على سبيل المثال ، طرفي قضيب مترى . فاذا كان القضيب المترى في حالة سكون في المحاور التي تحمل الفتحة وكان احد طرفيه في النقطة $x'=0$ والآخر في النقطة $x'=1$ عندئذ يقطع خطا طرفيه العالميين المحور ــ x في النقطتين $0,\ L$ ، كما هو مبين في الشكل ١٢ــ ٤ (آ) . والمسافة OL تمثل الطول المتقلص للقضيب المترى في المحاور التي لاتحمل الفتحة . وبالتماثل اذا كان القضيب المترى ساكنا في المحاور التي لاتحمل الفتحة وكان احد طرفيه في النقطة $x=0$ والطرف الآخر في النقطة $x=1$ عندئذ ، يقطع خطا طرفيه العالميين المحور ــ x في النقطتين 0 و L' ، الشكل ١٢ــ ٤ ب فالمسافة OL' تمثل الطول المتقلص للقضيب المترى في المحاور التي تحمل الفتحة .

لرؤية تمديد الزمن ، اعتبر الحدث $t'=1,\ x'=0$ كما تبينه ساعة في حالة السكون موضوعة في نقطة اصل المحاور التي تحمل الفتحة . ويظهر هذا الحدث في الزمن $t=\gamma.1$ في المحاور التي لاتحمل الفتحة .

المعلّمة T' في الشكل (١٢ـ ٥)٠



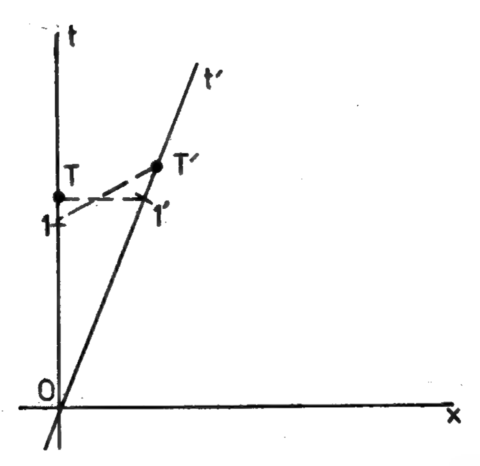
الشكل ١٢ـ ٤ : يوضح تقلص القضيب المتحرك الظاهري (قضيب مترى) (آ) قضيب في حالة سكون في المحاور التي تحمل الفتحة (ب) قضيب في حالة سكون في المحاور التي لاتحمل الفتحة٠ الخطان العالميان في طرفي القضيب مبينان بالخطوط المنقطة)٠

وبالتماثل الحدث $x = 0 , t = 1$ ،كما يقرأ من ساعة في حالة السكون في المحاور التي لاتحمل الفتحة ، يحدث في الزمن $t' = \gamma .1$ في المحاور التي تحمل الفتحة٠ المعلّمة T' في الشكل ٠ في كل حالة تظهر الساعة في المحاور المعاكسة تبطيء ٠

١٢ـ ٧ ٠ الرحلة الفضائية وتوأم التناقض الظاهرى

Space Travel and the Twin Paradox

افرض ان مسافرا بدأ بانطلاق عال رحلة الى نجم بعيد ٠ لنفرض ان رحلته تستغرق فترة زمنية معينة مثل T_0 ، كما تقاس بساعته التي يحملها معه ٠



(الشكل ١٢ـ٥ يوضح تنقيص الساعة المتحركة الظاهرى . المحور ـ t هو الخط العالمي للساعة في المحاور التي لاتحمل الفتحة والمحور t' هو الخط العالمـــي للساعـة في المحاور التي تحمل الفتحـة) .

افرض انـه بعد وصولـه توقف ودار بسرعـه عائدا الى الارض بنفس السرعه بحيث كـان زمن الرحلة الكلي هو $2T_0$. وفقا لتحويل لورنتز ، المعادلة (١٢ـ ١٩) ، لايتأثر عامل تمديد الزمن γ باشارة v . وبناء على ذلك يكون الزمن الكلي للرحلة الانكفائيـة كما قيست بساعات الارض هو ($2T_0$) γ ، اى انـه اكبر بالعامل γ من الزمن الذى قيس بساعة المسافر . الآن ، من المسلم بـه ان جميع العمليات التـــي تتاثـر بالزمن ، بضمنها ضربات القلب ، العمر ، وهلم جرا داخل المركبـة الفضائيـــة ستتغير بنفس المعدل الزمني كالساعـة المتحركـة ، (هذا يتفق مع الفرضية الاولى) . اذا كان الامر كذلك ، فان الذى يقوم برحلـة فضائيـة وكان لـه اخ توءم فانـه سيعود وهو اصغر من اخيـه التوءم الذى بقي في البيت . ولكن سبق ان بينا ان تمديد الزمن

هو تأثير معكوس فكل من التوأمين يستطيع ان يؤكد بان الاخ الآخر هو الذى قـــام بالسفره ولذلك كل منهما يدعي بان الاخ الآخر اصبح اصغر منـه • وهذا هو توأم ـــ التناقض الظاهرى المشهور الذى دار حولـه جدل كثير • ويمكن حل هذا التناقـــض بملاحظة ان الرحلة الحقيقيـة هي التي قام بها الاخ التوأم الذى غير اتجاه سـرعتــه وبذلك عانى تغييرا من محاور مرجعية الى اخرى • ويكون هو الذى اصبح اصغـر سـنا من الاخ التوأم الذى بقي في محاور مرجعية واحدة •

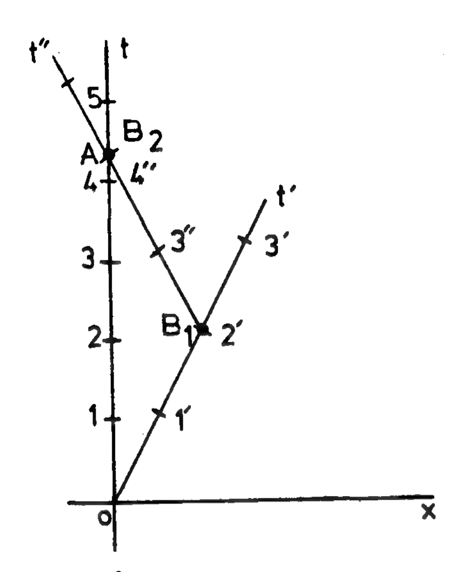
يمكن توضيح مزايا العمر غير المتماثل على منحني الفضاء والزمن • لنسم التوأميـــن بالرمزين A, B ، ولنفرض ان A يبقى في البيت و B يقوم بالرحلة فالخطـان العالميان للتوأمين هما OA و OB_1B_2 في الشكل ١٢ــ ٦ •

تتضمن المسالة ثلاثـة محاور للزمن • اولا • عندنا المحور ــ t الذى لايحمل الفتحـة وهو كذلك الخط العالمي للتوأم A •

ثانيـا ، هنـاك المحـور ــ t' وهـو الخـط العالمي للتوأم B خلال الجـزء الخارجـي للسـفرة • اخيـرا ، هنـاك المحـور ــ t'' الذى هو خـط B العالمي لرحلـة العـودة • الخطـوط العالميـة الثـلاث معلّمـة بمقاييسـها الزمنيـة علـى التتالـي كمـا حسـبت مـن تحويـل لورنتـز • يظـهـر الشـكل ان الزمـن الكلـي علـى الخـط العالمـي OA يكـون اكبـر مـن الذى علـى OB_1B_2 •

الزمـن المناسـب Proper Time

اذا كان على المسافر الفضائي في الشرح السابق ان يسافر بانطلاقات واتجاهات مختلفـة عندئذ سيكون خطـه العالمي اكثر تعقيدا من الرحلة المباشرة ذهابا وايابا •



الشكل ١٢ـ ٦ : العمر غير المتماثل للتوأمين . التوأم A يبقى في البيت والتوأم B يقوم بالرحلة .

ومع ذلك ، لازال بامكاننا بناء مقياس زمني على الخط العالمي للساعة المتحركة . وهذا الزمن يسمى بالزمن المناسب . لنستعمل الرمز τ ليشير اليه . عندئذ ، على اي جزء صغير من الخط العالمي للساعة المتحركة يرتبط عنصر الزمن المناسب $d\tau$ بعنصر الزمن المقابل له في المحاور الثابتة بالعلاقة التالية

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} = (1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}\, dt \qquad (١٢ـ٢٠)$$

حيث v تمثل الانطلاق الآني للساعة المتحركة . اذن ، بين اي حدثين على الخط العالمي للاخير ، عندنا

$$\tau_1 - \tau_2 = \int_{t_1}^{t_2} (1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}} \, dt$$

الآن عندما $v \neq 0$ يكون التكامل دائما اقل من واحد ، اذن

$$\tau_2 - \tau_1 < t_2 - t_1$$

وبعبارة اخرى ، فترة الزمن المناسب بين الحدثين يكون دائما اقل من فترة الزمن المقابلة لها والمسجلة على المحاور المرجعية الثابتة بغض النظر عن شكل الخط العالمي للساعة المتحركة .

١٢ــ ٨ نسبية الحركة المجردة . تحويلات السرع

Relativistic Kinematics. Transformation of Velocities

من تفاضل المعادلات (١٢ــ ١٧) التي تمثل تحويلات لورنتز نحصل على

$$dx = \gamma\,(dx' + v\,dt') \qquad (١٢ــ ٢١)$$
$$dy = dy'$$
$$dz = dz'$$
$$dt = \gamma\,(dt' + \frac{v}{c^2}\,dx')$$

اذن ، بالقسمة ، نحصل على

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v\,dt'}{dt' + \frac{v}{c^2}\,dx'}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma\,(dt' + \frac{v}{c^2}\,dx')}$$

او

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right)}$$

(١٢ـ٢٢)
$$\dot{x} = \frac{\dot{x}' + v}{1 + \frac{v\dot{x}'}{c^2}}$$

(١٢ـ٢٣)
$$\dot{y} = \frac{\dot{y}'}{\gamma\left(1 + \frac{v\dot{x}'}{c^2}\right)}$$

(١٢ـ٢٤)
$$\dot{z} = \frac{\dot{z}'}{\gamma\left(1 + \frac{v\dot{x}'}{c^2}\right)}$$

حيث $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{x}' = \frac{dx'}{dt'}$ ، وبالتماثل نحصل على مشتقات y , z •

ونحصل على مقلوب تحويلات السرعة بسهولة كما يلي

(١٢ـ٢٥)
$$\dot{x}' = \frac{\dot{x} - v}{1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}}$$

(١٢ـ٢٦)
$$\dot{y}' = \frac{\dot{y}}{\gamma\left(1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}\right)}$$

(١٢ـ٢٧)
$$\dot{z}' = \frac{\dot{z}}{\gamma\left(1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}\right)}$$

هناك نتيجة مباشرة ومهمة لمعادلات تحويل السرع السابقة هي ان السرع لاتتحد بعد ذلك بنفس الطريقة التي كانت تتحد بها في الحركة المجردة النيوتونية•

على سبيل المثال ، افرض ان الشاهد B يرى جسيماً يتحرك بسرعه $\dot{x}' = c/2$ في محاوره (التي تحمل الفتحة) • اضف الى ذلك ، لنفرض ان المحاور التي تحمل الفتحة تتحرك بسرعة $c/2$ باتجاه x بالنسبة للمحاور التي لاتحمل الفتحة (المشاهد A) • عند ئذ وفقا للمعادلة (١٢ـ ٢٢) تكون سرعة الجسيم في المحاور التي لاتحمل الفتحة لاتساوى c وانما تساوى

$$\dot{x} = \frac{\frac{c}{2} + \frac{c}{2}}{1 + \frac{(\frac{c}{2})(\frac{c}{2})}{c^2}} = \frac{c}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}\,c$$

وكمثال ثانٍ ، نلاحظ اذا كان شيء ما يتحرك بسرعة c في احدى المحاور ، مثل $\dot{x}' = c$ ، عند ئذ

$$\dot{x} = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = c$$

اى انـه يتحرك بسرعة c في المحاور الاخرى ايضا • وهذا يتفق مع فرضية النظرية النسبية الخاصة الثانية •

واخيرا لنفرض ان جسيما يتحرك في المستو ـ xy • ولنفرض ان متجه سرعة الجسيم يميل بزاوية θ مع المحور ـ x ، بحيث يكون

$$\tan\theta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

عند ئذٍ من معادلات تحويلات السرع ، نحصل على

$$\tan\theta' = \frac{\dot{y}'}{\dot{x}'} = \frac{\dot{y}}{\gamma(\dot{x}-v)} = \frac{\tan\theta}{\gamma(1-v/\dot{x})} \qquad (١٢ ـ ٢٨)$$

للزاوية بين متجه السرعة والمحور ـx' كما يقيسها مشاهد في المحاور التي تحمل الفتحة • في الحركة المجردة غير النسبية ، سوف لايظهر العامل γ • وهذا يعني ان θ' هي اصغر في النسبية منها في الكلاسيكية •

١٢ـ ٩ • نسبية ديناميك الجسيم • تغير الكتلة مع السرعة

Relativistic Particle Dynamics. The Variation of Mass with Velocity

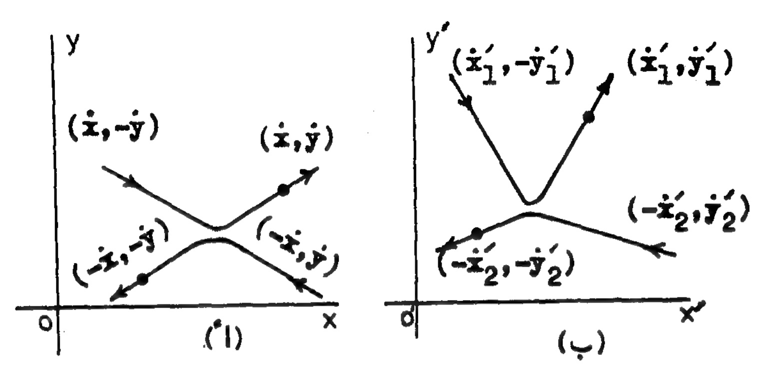
نستمر الآن في استقصاء المسالة الاساسية وهي كيف تؤثر تحويلات السرعة النسبية على قوانين حركة الجسيم عند اعتبار القوى والكتل • نختار لهذا الغرض مثالا بسيطاً يمكن التنبوء بنتائجه من فرضيات التناظر الاولية •

اعتبر تصادم جسيمين متماثلين • وافرض ان التصادم تام المرونة بحيث يرتد الجسيمان دون تغيير في انطلاقهما النسبي • ليقترب الجسيمان احدهما من الآخر على طول مسارين متوازيين بسرعتين متساويتين ومتعاكستين في محاور مختاره بصورة مناسبة مثل Oxy ،كما في الشكل ١٢ـ ٧ (آ) • وتحدث الحركة كليا في المستوى ـ xy • وقد صنف الجسيمان بالرقمين 1 ,2 ومركبتا سرعتيهما الابتدائيتين بـ $(\dot{x}, -\dot{y})$ و $(-\dot{x}, \dot{y})$ على التتالي • ويعاني كل من الجسيمين ، عند التصادم انعكاسا في مركبة y لسرعتيهما ، اما مركباتهما باتجاه x فتبقى دون تغيير • اذن المركبتان النهائيتان هما ، $(\dot{x}, \dot{y})$ و $(-\dot{x}, -\dot{y})$ كما هو مبين في الشكل •

لنصف بعد ذلك ، نفس التصادم في محاور مختلفة مثل $O'x'y'$ ،والتي تتحرك بسرعة v باتجاه x بالنسبةللمحاور التي لاتحمل الفتحة •

ولم يعد هناك ، في المحاور التي تحمل الفتحة ، تصادم تام التناظر،ولذلك من الضروري استعمال رموز سفلية لتشير الى سرعتي الجسيمين •

ان مركبات السرعة الابتدائية في المحاور التي تحمل الفتحة هي $(\dot{x}'_1, -\dot{y}'_1)$ و $(-\dot{x}'_2, \dot{y}'_2)$ للجسيمين $2,1$ على التتالي • وبعد التصادم تعاني مركبتا



الشكل ١٢ــ٧ منحنيات التصادم المائل المرن في نظامين محاور مختلفين

تغييرا في الاتجاه بينما تبقى مركبتا $\dot{x}'$ دون تغيير . فالقيم النهائية تكون اذن $(\dot{x}'_1 , \dot{y}'_1)$ و $(-\dot{x}'_2 , -\dot{y}'_2)$ كما هو مبين في الشكل ١٢ــ٧ب . ووفقا لقواعد تحويلات السرعة ، البند ١٢ــ٧ نحصل للجسيم (1) على

$$\dot{x} = \frac{\dot{x}'_1 - v}{1 - \dot{x}'_1 v/c^2} \qquad \dot{y} = \frac{\dot{y}'_1}{\gamma(1 - \dot{x}'_1 v/c^2)}$$

وبالتماثل للجسيم 2 نحصل على

$$-\dot{x} = \frac{-\dot{x}'_2 - v}{1 + \dot{x}'_2 v/c^2} \qquad -\dot{y} = \frac{-\dot{y}'_2}{\gamma(1 + \dot{x}'_2 v/c^2)}$$

وعند حذف $\dot{x}$, $\dot{y}$ من العلاقتين نحصل على

$$\frac{\dot{x}'_1 - v}{\dot{x}'_2 + v} = \frac{\dot{y}'_1}{\dot{y}'_2} = \frac{1 - v\dot{x}'_1/c^2}{1 + v\dot{x}'_2/c^2} \qquad (١٢ــ٢٩)$$

واذا حذفنا v من المعادلتين المذكورتين اعلاه نحصل بعد اجراء بعض العمليات الجبرية على العلاقة التالية

$$\frac{\dot{y}_1'}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \frac{\dot{y}_2'}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} \qquad (١٢ـ ٣٠)$$

حيث ان

$$v_1^2 = \dot{x}_1'^2 + \dot{y}_1'^2$$
$$v_2^2 = \dot{x}_2'^2 + \dot{y}_2'^2$$

ووفقا للنتيجة السابقة تتغير مركباتي y' لسرعتي بمقادير مختلفة كنتيجة للتصادم ، لان $\dot{y}_1'$ و $\dot{y}_2'$ مختلفان .

اذن اذا كانت كتلتا الجسيمين متساويتين فمركبتي y' لزخميهما تتغيران عندئذ ، بمقادير مختلفة ، اى سوف لايكون عندنا زخم خطي محفوظ . اذن امامنا اختياران ، اما ان ننبذ قانون حفظ الزخم الخطي ، او يجب علينا ان نفرض ان كتلة الجسيم تعتمد بطريقة ما على حركة الجسيم بالنسبة لمشاهد معين . وبدلا من نبذ قانون حفظ الزخم الخطي ، اخترنا البديل الاخر . سنفرض ان كتلة الجسيم المتحرك تساوى (كتلة السكون) m_o (اى كتلته كما تقاس في محاور مرجعية يكون فيها الجسيم ساكنا) .
ومضروبة بدالة ما للانطلاق . اى

$$m = m_o\, f(v)$$

من العلاقــة المبينــة في المعادلــة (١٢ــ٣٠) ، نلاحظ ان مركبتي y' للزخـــم الخطي تكون محفوظــة اذا اخترنا

$$f(v) = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} = \gamma$$

حيث v تمثل انطلاق الجسيم ، اى v_1 او v_2 على التتالي · اذن كتلـــة الجسيم المتحرك تصبح

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m_0 \qquad (١٢ـ٣١)$$

ووفقاً للنتيجــة السابقة ، تزداد الكتلــة مع الانطلاق وتقترب قيمتها من المالا نهايـــة عندما يقترب انطلاقها من انطلاق الضوء · وفي الاجسام المرئيــة الاعتياديــة تـــزداد الكتلــة بمقدار صغير جدا بحيث لا يمكن قياســه كالقذائف ولكن اقتراب انطلاقـــات الجسيمات الذريــة من سرعــة الضوء شيء اعتيادي · لقد حققت علاقــة الكتلــة والسرعة النسبية ، المعادلة (١٢ــ ٣١) ، تجريبيا الى درجــة كبيرة من الدقــة مع الالكترونات والجسيمات الاخرى التي تنتج في المعجلات ذات الطاقــة العاليــة ·

١٢ــ١٠ · علاقــة الكتلــة والطاقــة

The Mass-energy Relation

لنعتبر الشغل W المنجز لتعجيل جسيم حر من السكون الى انطلاق نهائي v . اذا كانت $\vec{F}$ القوة المسلطة على الجسيم عندئذ

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \qquad (١٢ـ٣٢)$$

وللبساطـة ، لنفرض نقط الحركة على خط مستقيم ، كالمحور ـ x في اى محاور مناسبة ، بحيث يمكننا كتابـة

$$dW = F\ dx = dx\ \frac{d(m\dot{x})}{dt} = \dot{x} d\ (m\dot{x})$$

و

$$W = \int_0^v \dot{x} d(m\dot{x}) = \left[\dot{x}(m\dot{x}) \right] - \int_0^v m\dot{x}\ d\dot{x}$$

$$= mv^2 - m_o \int_0^v \frac{\dot{x}\ d\dot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2/c^2}}$$

$$= mv^2 + m_o c^2 \left(\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1 \right)$$

$$= mc^2 - m_o c^2 \qquad (١٢ـ ٣٣)$$

ولما كان الشغل الكلي المنجز على جسيم حر يظهر كطاقـة حركيـة T للجسيـم ، نحصل على

$$T = mc^2 - m_o c^2 \qquad (١٢ـ ٣٤)$$

او مايكافيء ذلك

$$T = (\gamma - 1)\ m_o c^2 \qquad (١٢ـ ٣٥)$$

وباستخدام مفكوك ذات الحدين ، نحصل على

$$T = m_o c^2 \left[\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \ldots\right) - 1 \right]$$

$$= \frac{1}{2} m_o v^2 + \frac{3}{8} m_o \frac{v^4}{c^2} + \ldots..$$

اذن تختصر T الى قيمتها الكلاسيكية $\frac{1}{2}m_0v^2$ عندما تكون v صغيرة جدا بالمقارنة مع c ٠

واذا كتبنا العلاقة النسبية للطاقة الحركية على النحو التالي

$$m = m_0 + \frac{T}{c^2} = m_0 + \Delta m$$

نرى ان الطاقة الحركية تكافيء كتلة Δm حيث

$$T = \Delta mc^2 \qquad (١٢_٣٦)$$

عمم انشتاين وجهة النظر هذه بقوله ان اى كتلة m تكافيء مقدارا من الطاقة E ٠ حيث

$$E = mc^2 \qquad (١٢_٣٧)$$

عندئذ يجب تحوير قانون حفظ الطاقة ليتضمن الكتلة كشكل من الطاقة ٠

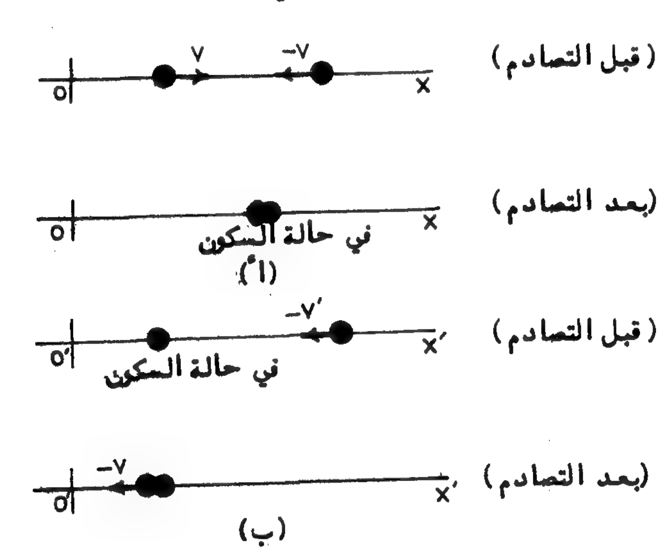
لقد حققت المعادلة المذكورة اعلاه تجريبيا ، فمثلا في حالة الانشطار النووى ، تكون الكتلة الكلية للشظايا المنشطرة اقل من كتلة النواة الاصلية ،فالفرق في الكتلة يظهر كطاقة ٠

استمرارية الطاقة الحرارية Inertia of Thermal Energy

كمثال بسيط لعلاقة الكتلة والطاقة ، لنعتبر حالة التصادم غير المرن لجسيمين ٠ افرض ان كتلتي السكون للجسيمين متساويتان وهي m_0 ، وانهما يتصادمان راسيا بسرعتين ابتدائيتين v و v- على التتالي ، باتجاه x لمحاور مناسبة مثل Oxy ، كما هو مبين في الشكل ١٢ــ ٨ (آ) ٠ لنفرض ان التصادم غير مرن تماما بحيث ان الجسيمين يبقيان معا بعد التصادم ٠ ومن التناظر، يكون هذا الزوج

في حالة سكون في المحاور التي لاتحمل الفتحــة ٠ والزخم الخطي الكلي قبل التصــادم هو $mv + (-mv) = 0$ وهو يساوى صفرا ايضا بعد التصادم٠ اذن الزخم الخطــي يكون محافظا في المحاور Oxy ٠

ثم لنصف بعد ذلك نفس التصادم في محاور مختلفــة مثل $O'x'y'$ تتحرك بانطلاق v بالاتجاه x بالنسبة للمحاور التي لاتحمل الفتحــة٠



الشكل (١٢ــ ٨) مخطط لتصادم راسي غير مرن تماما لجسيمين

الشكل (١٢ــ ٨(ب)) ٠ في هذه المحاور٠ يكون احد الجسيمين في البدء في حالــة السكون٠ بينما تكون سرعــة الجسيم الآخر قبل التصادم كما يلي

$$-v' = \frac{\dot{x} - v}{1 - v\dot{x}/c^2} = \frac{-2v}{1 + v^2/c^2}$$

ووفقا لقوانيننا لتحويلات السرع٠

ان سرعة الجسيم المركب بعد التصادم هي $-v$ في المحاور التي تحمل الفتحة ٠

اذ ن الزخم الخطي في المحاور التي تحمل الفتحــة هوكما يلي

قبل التصادم $-m v' = -m_o \gamma(v') v'$

حيـث $\gamma(v') = (1 - v'^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$v' = 2v\,(1 + v^2/c^2)^{-1}$$

بعد التصادم

$$-\bar{m} v = -\bar{m}_o \gamma(v) v$$

حيـث

$$\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

ترمز هنا $\bar{m}_o$ لكتلــة سكون الجسيم المركب المتكون بعد التصادم٠

الآن اذا وضعنا بكل بساطــة $\bar{m}_o = 2m_o$ نجد ان الزخم الخطي الابتدائي لايساوى النهائي في المحاور التي تحمل الفتحـــة٠ ان سبب ذلك يرجع الى اهمالنــا زخــم الطاقــة الحركيــة T الذى تحول الى حرارة اثناء التصادم، ولاجــل اخــذ هذا الزخم بنظر الاعتبار يمكننا اضافــة كتلــة مقدارها T/c^2 للجسيم المركـــــب ، اى

$$\bar{m}_o = 2m_o + \frac{T}{c^2}$$

$$= 2m_o + 2m_o\,(\gamma - 1)$$

$$= 2m_o \gamma$$

حيث

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

في الحقيقة وجد ان الزخم الخطي يكون محافظا في المحاور التي تحمل الفتحة ، لهذه القيمة لكتلة السكون .

خلق وابادة زوج جسيم ـ وجسيم مضاد

Creation and Annihilation of Particle-antiparticle Pairs

قد يكون ، احسن توضيح مباشر لعلاقة الكتلة ـ والجسيم هو مايتعلق بزوج جسيم ـ وجسيم مضاد . لقد ظهر الآن ان كل الجسيمات الاولية في الطبيعة مثل الالكترونات ، والبروتونات ، والنيوترونات ، وما الى ذلك ، لها جسيم نظير مضاد . وفي كل حالة ، يكون للجسيم المضاد نفس كتلة الجسيم ولكن له خواص كهرومغناطيسية معاكسة (شحنة ، عزم مغناطيسي) وفي كل حالة يمكن خلق زوج جسيم ـ وجسيم مضاد بانفاق طاقة كافية او ان يبيد احدهما الآخر فتتحرر طاقة . ان اول جسيم مضاد اكتشف هو الالكترون المضاد او البوزترون وذلك سنة ١٩٣٢ . وقد لوحظ في الاشعة الكونية وفي اضمحلال اشعة بيتا المنبعثة من نوايا مشعة معينة . وعندما تلامس البوزترونات مادة عادية تباد تماما وذلك وفقا للعلاقة التالية

بوزترون + الكترون ⟵ طاقة

حيث تتحول الكتلة الكلية الى اشعة كاما عالية الطاقة . ويمكن ان تحدث عكس العملية وذلك عندما تضرب اشعة كاما العالية الطاقة ذرات مادة ملائمة . ويمكن ايضا استحداث جسيمات مضادة بضرب الذرات مباشرة بجسيمات عالية الانطلاق .

من كتلة الالكترون المعروفة وجد ان طاقة السكون m_oc^2 هي بحدود

0.5 MeV (مليون الكترون ــ فولت) اى ان خلق وابادة الكترون ــ بزترون يستلزم طاقات من القدر ال MeV • ولما كانت كتلتا البروتون والنيوترون هي حوالي ١٨٠٠ مرة اكبر من كتلة الالكترون فهذا يعني ان خلقها يستلزم طاقة اكبر• ولهذا السبب لم يكتشف البروتون المضاد او النيوترون المضاد الا بعد ان بدأت معجلات ذات بليون الكترون ــ فولت عملها في اواخر الخمسينيات •

لنحسب الطاقة اللازمة لانتاج زوج بروتون ــ بروتون مضاد من تصادم بروتونين بحيث يكون احد البروتونين « الهدف »في حالة السكون • وستعطي الطاقة الصغرى من الحالة التي يكون فيها الجسيمان الاصليان والزوج المخلوق في حالة السكون في محاور مركز الكتلة مباشرة بعد عملية انتاج الزوج • اذن « يقترب البروتونان احدهما من الآخر بالسرعتين v' و $-v'$ في محاور مركز الكتلة بحيث لكل بروتون كتلة سكونه m_o نحصل على

$$mc^2 = 2m_oc^2$$

او

$$m = 2m_o = m_o\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

اذن

$$\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2$$

بحيث يكون في محاور مركز الكتلة

$$v' = c\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ولهذا السبب يكون انطلاق البروتون الساقط v في المحاور المختبرية هو

$$v = \frac{v' + v'}{1 + v'^2/c^2} = \frac{2(\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}} c}{1 + (\frac{3}{4})} = (\frac{48}{49})^{\frac{1}{2}} c$$

وفقاً لقوانين تحويل السرعة . واخيراً ، نجد ان طاقة البروتون الساقط في المحاور المختبرية تعطى من

$$E = mc^2 = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{48}{49}}} = 7m_o c^2$$

بحيث ان الطاقة الحركية $T = 6m_o c^2$ او حوالي 5.5 BeV

*١٢ـ ١١ . استخدام المصفوفات والمتجهات ـ الاربعة في النسبية

The Use of Matrices and Four-vectors in Relativity

رأينا ان المتطلب الرئيسي لتحويل لورنتز هو ان

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

كمية ثابتة invariant او لها نفس القيمة في جميع المحاور المرجعية ، وهذا يعني ، ان لاى نظامين

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$$

لندخل الرموز الجديدة التالية

$$x_1 = x$$

$$x_2 = y \qquad (١٢ـ ٢٨)$$

$$x_3 = z$$

$$x_4 = ict$$

ويمكن اعتبار الكميات $(\mu = 1, 2, 3, 4)$ x_μ كمركبات متجهة في فضـــــاء ذى اربعة ابعاد · ان "طول" المتجـه هو الكميـة s والمعرفة كالاتي

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \qquad (١٢ـ٣٩)$$

ان الخاصة الاساسية لتحويلات لورنتز هو انـه يترك مقدار s ثابتا · ويمكن التعبيـــر عن هذا كالاتي

$$\sum_\mu x_\mu^2 = \sum_\mu x_\mu'^2$$

ويمكن التعبير عن تحويلات لورنتز نفسه بصيغة المصفوف كما يلي

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad (١٢ـ٤٠)$$

حيث

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad (١٢ـ٤١)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad (١٢ـ٤٢)$$

ويطبق المصفوف في المعادلة (١٢ـ٤٠) للحالة الخاصة وهي الحركة الانتقالية في اتجاه المحور ـ x_1 ٠ ويمكن ايجاد معادلات المصفوف بسهولة للحركة الانتقالية في الاتجاهات الاخرى ٠

من الممتع ملاحظة انه من الممكن جعل مصفوف التحويل للورنتز يشابه مصفوف الدوران البسيط في الفضاء الاعتيادى وذلك بادخال التعويض التالي

$$\gamma = \cos \psi$$

ولما كانت γ اكبر من واحد ، لذلك تكون ψ خيالية ٠ عندئذ نحصل على

$$\sin \psi = (1 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{1-\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{-\beta^2}{1-\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} = i\beta\gamma$$

اذن يمكن كتابة المصفوف لتحويل لورنتز على النحو التالي

$$\begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & 0 & \cos\psi \end{bmatrix}$$

نتذكر من الفصل الاول ان مصفوف التحويل للدوران خلال زاوية حقيقية θ حول المحور ـ z هو

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

في الفضاء ذي الابعاد الاربعة ، دوران كهذا حول المحور ـ z او x_3 سيمثل بالمصفوف

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ولما كان الدوران حول احد المحاور الفضائية يترك طول المتجه الرابع ايضا دون تغيير ، عندئذ دورات كهذه يمكن ادخالها ضمن مجموعة التحويلات العامة للورنتز • احد فوائد المصفوف هو امكان معالجة تراكيب تحويلات لورنتز بسهولة بواسطة ضرب المصفوفات •

تعريف المتجه الرباعي العام

قد يعرف المتجه ـ الرباعي بطريقة عامة كمجموعة لاربع كميات

$$A_\mu \quad (\mu = 1, 2, 3, 4)$$

تتحول بنفس طريقة احداثيات الموضع x_μ تحت تحويل لورنتز • اى ان

$$\begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \\ A'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \qquad (١٢ـ ٤٣)$$

او بصيغة مختصرة

$$[A'] = [L] \quad [A] \qquad (١٢ـ ٤٤)$$

تشير الكميات التي تحمل الفتحة الى مركبات المتجه الرباعي في المجاور المرجعية التي تتحرك بسرعة نسبية $v = \beta c$ في الاتجاه x_1 و $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$

وواضح ان المقدار لاى متجه ـ رباعي يبقى لايتغير او ثابتا تحت تحويل لورنتز

$$\sum_{\mu} A'^2_{\mu} = \sum_{\mu} A^2_{\mu}$$

ويقال عن مركبات المتجه ـ الرباعي بانها مساوية في درجة ثبوتها covariant بالنسبة الى تحويل لورنتز ٠

ان مفهوم المتجه ـ الرباعي مفيد جدا في النظرية النسبية ووفقا للفرضية الاولى تكون جميع المحاور المستمرة متماثلة تماما ٠ وهذا ، عندما يوحد مع الفرضية الثانية ، يعطى تحويل لورنتز الذى يربط المشاهدات بين انظمة محاور مستمرة مختلفة ٠ اذن ، عندما يصاغ اى قانون فيزيائي ، بصورة ملائمة ، يجب ان تبقى صيغته ثابتة عندما ينسب الى منظومات محاور مستمرة مختلفة ولاسيما اذا احتوت معادلة على كميات متجهة فيجب ان توضع بصيغة المتجه ـ الرباعي لكي تكون صحيحة من النظرة النسبية ٠ وهذا يؤمن ان المعادلة ستتحول بدرجة متساوية الثبوت تحت تحويل لورنتز ، ولهذا السبب تستوفى المعادلة فرضيتين النسبية الخاصة ٠

صيغة المتجه ـ الرباعي للسرعة والزخم

The Four-vector Form of Velocity and Momentum

افرض ان جسيما متحركا خطه العالمي يعين تعينا كاملا في محاور مرجعية معينة بالعلاقات $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t = t$ او مايكافئ،

ذلك $x_1=x_1(x_4)$ ، $x_2=x_2(x_4)$ ، $x_3=x_3(x_4)$ ، $x_4=x_4$ ، رأينا ان المحاور الموضعية x_μ تتحول كمتجه ــ رباعي و، وفقا لذلك ، الفرق Δx_μ بين اى نقطتين على الخط العالمي يتحول ايضا كمتجه ــ رباعي ٠ ولكن النسبة

$$\frac{\Delta x_\mu}{\Delta t} = ic\,\frac{\Delta x_\mu}{\Delta x_4}$$

هي ليست متجه ــ رباعي ، لان Δt لـه قيم مختلفة في منظومات محاور مرجعية مختلفة ٠ لاجل ايجاد صيغة المتجه ــ الرباعي للسرعة ، نستخدم حقيقة كون الفترة الزمنية المناسبة $\Delta \tau$ بين حدثين هي كمية ثابتة ٠ ولبرهنتها عندنا

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - c^2(\Delta t')^2$$

او

$$(\Delta r)^2 - c^2\,(\Delta t)^2 = (\Delta r')^2 - c^2\,(\Delta t')^2$$

اذن

$$\Delta t\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \Delta t'\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta r'}{\Delta t'}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

ووفقا لذلك تكون الفترة الزمنية المناسبة $\Delta \tau$ هي

$$\Delta \tau = \Delta t\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \Delta t'\left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

اى ان $\Delta \tau$ لاتتغير invariant ٠ هنا u و u' هما انطلاقا الجسيم في نظامي المحاور المرجعية ٠

نرى الآن ان المتجه

$$v_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$$

يتحول بنفس طريقــة x_μ ولذلك يعرف متجــه ــ رباعي • وسوف نسميــه السـرعــه ــ الرباعيــة • وتعطى مركبات السرعة الرباعيــة بوضوح كما يلي :

$$V_1 = \frac{dx_1}{d\tau} = (1 - \frac{u^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{dt} = \gamma(u)\dot{x}$$

$$V_2 = \frac{dx_2}{d\tau} = (1 - \frac{u^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{dt} = \gamma(u)\dot{y} \qquad (١٢_٤٦)$$

$$V_3 = \frac{dx_3}{d\tau} = (1 - \frac{u^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} \frac{dz}{dt} = \gamma(u)\dot{z}$$

$$V_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = ic\,(1 - \frac{u^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} = \gamma(u)ic$$

لقيم صغيرة لـ u تتحول المركبات الفضائية الثلاث لـ V_μ الى مركبات السرعــه الاعتيادية $\vec{u}$ • ويعطى مربع السرعه ــ الرباعية من

$$\sum_\mu V_\mu^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\ \gamma^2(u) - c^2\gamma^2(u) \qquad (١٢_٤٧)$$

$$= (u^2 - c^2)\ \gamma^2(u) = -c^2$$

والآن لما كانت السرعة ــ الرباعية تتحول كمتجــه رباعي • فيمكننا كتابــة

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ V_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} \qquad (١٢_٤٨)$$

او بوضوح

$$\begin{aligned} v'_1 &= \gamma v_1 + i\beta\gamma v_4 \\ v'_2 &= v_2 \\ v'_3 &= v_3 \\ v'_4 &= -i\beta\gamma v_1 + \gamma v_4 \end{aligned} \qquad (١٢_٤٩)$$

حيث $\gamma = \gamma(v) = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$ ، بناء على ذلك ، ومن معاينة المعادلات (١٢ــ ٤٦) نجد أن مجموعة المعادلات المذكورة اعلاه تكافيء الـــــى

$$\begin{aligned} \dot{x}'\gamma(u') &= (\dot{x} - \beta c)\gamma\gamma(u) \\ \dot{y}'\gamma(u') &= \dot{y}\gamma\gamma(u) \\ \dot{z}'\gamma(u') &= \dot{z}\gamma\gamma(u) \end{aligned} \qquad (١٢_٥٠)$$

$$\gamma(u') = (1 - \frac{\dot{x}\beta}{c})\gamma\gamma(u) \qquad (١٢ _ ٥١)$$

اذا حذفنا $\gamma(u')$ من المعادلات الثلاث الاولى وذلك باستعمال (الاخيرة) نجد ان

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \frac{\dot{x} - \beta c}{1 - \dot{x}\beta/c} \\ \dot{y}' &= \frac{\dot{y}}{\gamma(1 - \dot{x}\beta/c)} \\ \dot{z}' &= \frac{\dot{z}}{\gamma(1 - \dot{x}\beta/c)} \end{aligned} \qquad (١٢_٥٢)$$

هذه في الحقيقة هي نفس قوانين تحويل السرعة التي استنبطت سابقا بطريقة مختلفة في البند ١٢ــ ٨ ٠

الزخم ٠ الرباعي Four-Momentum

يعرف الزخم ــ الرباعي كالاتي

$$P_\mu = m_o V_\mu \qquad (١٢ــ ٥٣)$$

وواضح انه يتحول كمتجه ــ رباعي ، لان كتلة السكون m_o لاتتغير ، ومركبات الزخم ــ الرباعي هي

$$P_1 = m_o \frac{dx_1}{d\tau} = m_o \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{dt}$$

$$P_2 = m_o \frac{dx_2}{d\tau} = m_o \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{dt}$$

$$P_3 = m_o \frac{dx_3}{d\tau} = m_o \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dz}{dt} \qquad (١٢ــ ٥٤)$$

$$P_4 = m_o \frac{dx_4}{d\tau} = m_o \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} ic$$

اذا ادخلنا الكتلة النسبية m والمعرفة بالعلاقة التالية

$$m = m_o \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (١٢ــ ٥٥)$$

عندئذ يمكننا كتابة

$$P_\mu = m_o \frac{dx_\mu}{d\tau} = m \frac{dx_\mu}{dt} \qquad (١٢ــ ٥٦)$$

اى ان

$$P_1 = m\dot{x}$$

$$P_2 = m\dot{y} \qquad (١٢_٥٧)$$

$$P_3 = m\dot{z}$$

$$P_4 = icm$$

اذن المركبات الفضائية للزخم ــ الرباعي تشبه تماما مركبات الزخم الاعتيادي ولكن تستعمل هنا الكتلة النسبية بدلا من كتلة السكون ٠

ان مقدار الزخم ــ الرباعي لايتغير ، كما يجب ان يكون ، لان

$$\sum_{\mu} P_{\mu}^2 = m^2u^2 - m^2c^2 = m_o{}^2(u^2 - c^2)\,\gamma^2(u) = -m_o{}^2c^2$$

لندخل الكمية E ، الكتلة والطاقة النسبية ، المعرفة كالاتي

$$E = -icP_4 = mc^2 \qquad (١٢_٥٨)$$

عندئذ يمكن التعبير عن ثبوت مقدار الزخم ــ الرباعي كما يلي

$$\sum P_{\mu}^2 = P^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_o{}^2c^2 \qquad (١٢_٥٩)$$

اذا اعتبر بقاء الزخم ــ الرباعي كمتجه في الفضاء ــ الرباعي كتعميم طبيعي لقانون حفظ الزخم الاعتيادي ، نرى من المعادلات (١٢ــ ٥٧) ان قانون الحفظ الاعتيادي يستبقى اذا استعملت الكتلة النسبية في كل مكان ٠ اضف الى ذلك ، ان بقاء المركبة الرابعة للزخم ــ الرباعي يعني ان الكتلة النسبية الكلية $\sum m$ ، او الكتلة والطاقة $\sum E$ تكون محافظة في اى محاور مرجعية معينة ٠

افرض على سبيل المثال عملية خلق الزوج pair creation التي شرحت سابقا في البند ١٢ــ١٠ ٠ لنفرض ان بروتونين قد تصادما بطاقة في نهايتها الصغرى اللازمة لتكوين بروتون وبروتون مضاد في نظام مركز ــ الكتلة ٠ عندئذ تكون كتلة السكون النهائية $4m_o$ لان الجسيمات الاربعة النهائية تكون ساكنة في نظام مركز ــ الكتلة٠ قبل التصادم ، عندنا في النظام المختبرى $E + m_o c^2$ للكتلة والطاقة الكلية للبروتونين الساقط والهدف ٠ اذن يمكن التعبير عن ثبوت مقدار ــ الرباعي كما يلي

$$P^2 - \frac{(E + m_oc^2)^2}{c^2} = -16m_o^2c^2$$

او ، بعد ترتيب الحدود نحصل على

$$P^2 - \frac{E^2}{c^2} - 2Em_o = -15\ m_o^2c^2$$

وفوق ذلك ، لما كان الحدان الاوليان يشيران الآن الى البروتون الساقط ، يكون عندنا $P^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_o^2c^2$، وبناء على ذلك

$$-m_o^2c^2 - 2Em_o = -15\ m_o^2c^2$$

او

$$E = 7\ m_o\ c^2$$

وهي تتفق مع حساباتنا السابقة

القوة ــ الرباعية The Four-force

نحن الآن في موضع لصياغة معادلة القوة بشكلها الثابت ٠ لندخل متجه ــ رباعي جديد F_μ يسمى بالقوة ــ الرباعية ٠ عندئذ التعميم النسبي

لقانون نيوتن الثاني يكون

$$F_\mu = \frac{dP_\mu}{d\tau} \quad (١٢\text{ـ}٦٠)$$

وبالرجوع الى المعادلة (١٢ـ ٥٦)، نرى ان المعادلة السابقة يمكن كتابتها على النحو التالي

$$F_\mu = \gamma(u)\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx_\mu}{dt}\right) \quad (١٢\text{ـ}٦١)$$

حيث u هي انطلاق الجسيم. اذن المركبات الثلاث الاولى للقوة ـ الرباعية تنسب الى القوة الاعتيادية $\vec{f}$ كالاتي

$$F_1 = \gamma(u)f_x \quad F_2 = \gamma(u)f_y \quad F_3 = \gamma(u)f_z \quad (١٢\text{ـ}٦٢)$$

وعندنا للمركبة الرابعة

$$F_4 = ic\,\gamma(u)\frac{dm}{dt} \quad (١٢\text{ـ}٦٣)$$

او مايكافىء ذلك

$$F_4 = \frac{i}{c}\,\gamma(u)\frac{dE}{dt} \quad (١٢\text{ـ}٦٤)$$

اذن تنسب F_4 الى المعدل الزمني الذى تتغير فيه كتلة الجسيم او الكتلة والطاقة .

افرض مرة اخرى ثبوت مقدار الزخم الرباعي

$$\sum_\mu P_\mu^2 = -m_o c^2$$

وعند تفاضلها بالنسبة للزمن المناسب نحصل على

$$\sum_\mu P_\mu \frac{dP_\mu}{d\tau} = 0 \quad (١٢\text{ـ}٦٥)$$

او

$$\sum_{\mu} P_{\mu} F_{\mu} = 0 \qquad (١٢ــ٦٦)$$

ويمكن تفسير هذا كصيغة لتعامد P_{μ} و F_{μ} ، وعند كتابة المعادلة بدلالــة المركبات وعكس الحد P_4F_4 نحصل على

$$P_1F_1 + P_2F_2 + P_3F_3 = -P_4F_4 \qquad (١٢ــ٦٧)$$

وهي ، من المعادلات (١٢ــ٥٧)، (١٢ــ ٦٢)، و(١٢ــ ٦٣) ، تكون مكافئــة الى

$$m\vec{v}.\vec{f} = -(icm)\frac{i}{c}\frac{dE}{dt}$$

او

$$\vec{v}.\vec{f} = \frac{dE}{dt} \qquad (١٢ــ ٦٨)$$

الان معدل التغيير الزمني للكميــة $E = mc^2$ هو المعدل الذى تنجــز فيــــه القــوة الاعتيادية f شغلا على الجسيم . وهذا يتفق مع شرحنا السابق الخــــاص بعلاقــة الكتلــة والطاقــة ، البند ١٢ــ ١٠ .

تماريــــــــــن

١٢ــ ١ــ املأ الخطوات في اشتقاق معامل تحويل لورنتــز ، المعادلــة ١٢ــ ١٤ .

١٢ــ ٢ــ بين ان معكوس تحويل لورنتــز، المعادلة (١٢ــ ١٧) ينتج جبريـا مــــن التحويل المباشر ، المعادلة (١٢ــ ١٦) .

١٢ــ ٣ ــ اثبت صحــة التقريبات التالية

(a) $\gamma \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}$ if $v \ll c$

(b) $\gamma \approx \sqrt{\frac{c}{2\epsilon}}$ where $\epsilon = c - v$ if $v \approx c$

١٢ــ٤ــ اذا كان انطلاق الارض المداري حول الشمس حوالي ٣٠ كم / ثانيــة احسب تقلص لورنتز لقطر الارض بسبب هذه الحركــة ٠

١٢ــ٥ ــ اذا كان نصف ــ عمر الاشعاع الكوني μ ميزون هو ٢ر٢ ميكروثانيــة فــي محاور مرجعية فيها الميزون في حالة سكون٠ جد نصف ــ عمر ميزونات μ المقتربــة من الارض بانطلاق ٩٩٩ر٠ من سرعة الضوء كما يقيسها مشاهد على الارض ٠

١٢ــ ٦ــ في التمرين السابق ، افرض ان الميزونات تسير بخطوط مستقيمة خلال الجو٠ احسب سمك طبقــة ميل واحد للجو كما تظهر للميزونات ٠

١٢ــ٧ــ ظهر في محاور مرجعية معينة A حدثان في آن واحد ٠ وكانا مفصوليــن بمسافة ١٠ متر في تلك المحاور٠ فما هي فاصلة المسافة والزمن بينهما كما يقيسهــا مشاهد B يتحرك بانطلاق c/2 في اتجاه خط العشرة الامتار، ولمشاهد C يتحــرك بنفس الانطلاق عموديا على هذا الخط ؟ اعمل نفس الحسابات اذا كانت الفترة الزمنيــة بين الحدثين هي ١٠ $^{-8}$ ثانية في المحاور A ٠

١٢ــ ٨ــ يقال عن الفترة بين حدثين في محاور مرجعية معينــة بانها شبيه فضائــي او شبيه زماني ويعتمد ذلك على ما اذا كانت الفترة الزمنيــة Δt اكبر او اقل من الكمية $\frac{\Delta l}{c}$ على التتالي ، حيث Δl هي الفاصلة الفضائية بين الحدثين٠ برهــن ان فترات شبيه الفضائية في احدى المحاور تظهر كشبيه فضائية في جميع المحاور وان شــبيــه الزمانية في احدى المحاور تظهر كشبيه زمانية في الجميع٠

١٢ــ ٩ ــ اثبت ان التعاقب الموقت بين حدثين يكون محافظا في جميع انظمــة المحاور المرجعية اذا ظهر الحدثان في نفس الموضع الفضائي في محاور ما ٠

١٢ــ١٠ ــ اذا كان طول النبضة الضوئية التي تسير في الاتجاه ــ x في محاور مرجعية معينة A هو L ۰ اثبت ان طول نفس النبضة كما تقاس في محاور مختلفة B ، تتحرك بالانطلاق v في الاتجاه ــ x هو $L\left[(c + v)/(c - v)\right]^{\frac{1}{2}}$

١٢ــ ١١ــ مركبة فضائية قامت برحلة الى اقرب نجم ، α ــ بروكسيما (α -Proxima) وعلى مسافة ٤٫٣ سنة ضوئية ۰ وكانت تسير في رحلة ذهابها بانطلاق $0.9c$ ورحلة عودتها تسير بانطلاق $0.8c$ بالنسبة للارض ۰ فما هو الزمن الكلي لرحلة الذهاب والاياب كما يقاس بساعة في المركبة وساعة على سطح الارض ؟

١٢ــ ١٢ــ تركت مركبة فضائية الارض بانطلاق $c/2$ ورحلت لفترة زمنية معينة ۰ بعدئذ دارت وعادت الى الارض بانطلاق $c/3$ بالنسبة للارض ۰ فاذا كان الزمن الكلي لرحلة الذهاب والاياب هو سنة كاملة كما قيس بساعة المركبة الفضائية ، فما هو الزمن الكلي كما يقاس بساعات الارض ؟ وماهي المسافة التي تقطعها المركبة قبل ان تدور للعودة ؟ وما هو الزمن في ساعة المركبة عند دورانها للعودة ؟

١٢ــ ١٣ــ في محاور مرجعية معينة A ، كان موضع المتجه لحدث هو $\vec{r}$ وظهر في الزمن t ۰ بين ان موضع المتجه والزمن لنفس الحدث في محاور اخرى B تتحرك بسرعة ثابتة $\vec{v}$ بالنسبة الى A ۰ هما

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{v}\left[\gamma t + \vec{r}\cdot\vec{v}\,(\gamma - 1)/v^2\right]$$

$$t' = \gamma\,(t + \vec{r}\cdot\vec{v}/c^2)$$

حيث $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ ، وكانت نقطتا الاصل لنظامي المحاور منطبقتين في ($t = t' = 0$) وهذا تعميم لتحويل لورنتز ۰

١٢ــ ١٤ــ لوحظت من الارض مجرتان متباعدتان A , B • وكانتا تبتعدان باتجاهين متعاكسين • فاذا كان انطلاق ابتعاد A هو $c/2$ و B هو $3c/4$ ، فما هــو انطلاق ابتعاد B كما يقاس من مشاهد على A •

١٢ــ ١٥ــ اذا كان انطلاق جسيم $c/2$ في محاور مرجعية معينة • وكان خط مســاره يعمل زاوية ٤٥° مع المحور ــ x • جد انطلاق واتجاه حركــة الجسيم كما تقاس في محاور مرجعية تتحرك بانطلاق $c/4$ في الإتجاه x • علما بان محاور النظامين متوازيــة • احسب كلا من القيم الكلاسيكية والنسبية •

١٢ــ ١٦ــ ظهر طول قضيب متحرك مساويا الى L_A في المحاور المرجعية A ومساويا الى L_B في محاور اخرى B تتحرك بانطلاق v بالنسبة الى A • فما هــو الطول السكوني للقضيب ؟ علما بان جميع الحركــة كانت في اتجاه واحد •

١٢ــ ١٧ــ استنبط العلاقــة التالية لتحويل التعجيل

$$\ddot{x} = \frac{\ddot{x}'}{\gamma^3(1 + v\dot{x}'/c^2)^3}$$

حيث $\ddot{x}' = d^2x'/dt'^2,\ \ddot{x} = d^2x/dt^2$ ، والمحاور التي تحمل الفتحــة تتحرك بانطلاق v باتجاه x • جد العلاقات المماثلة لتحويل مركبات y و z •

١٢ــ ١٨ جسيم لــه تعجيل ثابت a كما قيس في محاور فيها الجسيم آنيــا فــي حالة السكون، اي ان ، في النظام الملائم للجسيم • اثبت ان انطلاق الجسيم فــي محاور مرجعية ثابتــة هــو

$$\dot{x} = c\ \left[1 + (c/at^2)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

حيث يبدأ الجسيم من السكون في الزمن $t = 0$ ، اذا كانت $(a=g=32\ ft/sec^2)$ ماهو انطلاق الجسيم عندما يكون t مساويا لسنة واحدة ؟ وعندما يكون τ مساويا لسنة واحدة ، حيث τ يمثل الزمن المناسب للجسيم .

١٢ــ ١٩ــ في التمرين السابق ، اثبت ان موضع الجسيم كدالة للزمن هو $ax^2 + 2c^2x = ac^2t^2$.

من هذا برهن على ان الاشارة الضوئية سوف لاتلحق بالجسيم اذا ارسلت متأخرة بزمن اقل من $t = c/a$.

١٢ــ ٢٠ــ عجلت البروتونات في سايكلترون الى انطلاق بحيث تكون طاقتها الحركية ضعف طاقة السكون m_0c^2 فما هو انطلاقها ؟

١٢ــ ٢١ــ تؤثر قوة ثابتة $\vec{f}$ على جسيم كتلة سكونه m_0 ، اذا بدأ الجسيم من السكون في الزمن $t = 0$ ، جد المسافة التي يقطعها في الزمن t ، كيف يختلف هذا التمرين من التمرين ١٢ــ ١٨ المذكور اعلاه ؟

١٢ــ ٢٢ــ يتحرك قضيب طوله ١٠ سم بالطول على طاولة افقية ملساء فيها فتحة قطرها ٩ سم ، لنفرض ان انطلاق القضيب v يكون بحيث $\gamma = 2$ ، اى يظهر طول القضيب ٥ سم لمشاهد في حالة السكون بالنسبة للطاولة ، اهمل جاذبية الارض ولكن افرض ان دفعين متساويين مقدارهما $\hat{P}$ قد سلطا عموديا على نهايتي القضيب ، حالما انتهى الطرف الخلفي من الفتحة بذلك يدخل القضيب في الفتحة . بين اذا سلطت الدفوع في آن واحد في محاور سكون الطاولة ، عندئذ هي ليست كذلك في محاور سكون القضيب ، ولكن الطرف الامامي يتسلم دفعة اولا ، اذن يدخل

القضيب الفتحة بزاوية ويمكنه النفوذ منها ولو ان قطر الفتحة يظهر ٤ر٠ سم فقط بالنسبة لمحاور السكون الاصلية للقضيب • جد ميلان القضيب الناتج • بين ان القضيب يظهر منحنيا في محاوره الاصلية للسكون خلال الفترة الزمنية بين الدفعتين •

١٢ـ ٢٣ـ تؤثر قوة $\vec{f}$ على جسيم كتلة سكونه m_o • اثبت مبتدأ بـ $\vec{f} = d(m\vec{v})/dt$ ان

$$\vec{f} = m\dot{\vec{v}} + \vec{v}(\vec{f}\cdot\vec{v}/c^2)$$

١٢ـ ٢٤ـ بدأ صاروخ من السكون بكتلة سكونية كلية m_i • اذا كان u انطلاق الوقود بالنسبة للصاروخ • اثبت ان انطلاق الصاروخ النهائي هو

$$c\,\frac{(m_i/m_f)^{2u/c} - 1}{(m_i/m_f)^{2u/c} + 1}$$

حيث m_f هي كتلة السكون النهائية للصاروخ المتحرك • علما بان لاتوجد هناك قوى خارجية •

١٢ـ ٢٥ـ جسيم كتلة سكونه m_o ينحل الى جسيمين كتلتا سكونهما m_1 و m_2 على التتالي • اثبت ان طاقتيهما هي

$$E_1 = \left(\frac{m_o^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m_o}\right) c^2$$

$$E_2 = \left(\frac{m_o^2 - m_1^2 + m_2^2}{2m_o}\right) c^2$$

١٢ـ ٢٦ـ جسيم كتلة سكونه m_1 وسرعته الابتدائية v_1 يصطدم بجسيم آخر كتلة سكونه m_2 الذى كان في حالة السكون . عند التصادم ، التصق الجسيمان ولم يحدث خسارة في الطاقة نتيجة الاشعاع . اثبت ان كتلة سكون الجسيم المتكون النهائية هي

$$(m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\,\gamma\,)^{\frac{1}{2}}$$

حيث

$$\gamma = (1 - v_1^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

١٢ـ ٢٧ـ حل التمرين السابق للحالة التي يكون فيها انطلاقا الجسيمين الابتدائيان v_1 ، v_2 على التتالي . واتجاههما الابتدائيان للحركة يختلفان بزاوية θ .

١٢ـ ٢٨ـ اصطدم بروتون يتحرك بانطلاق ابتدائي v مع بروتون آخر في حالة السكون . وبعد التصادم صنع خطا حركة البروتونين الزاويتين θ و φ مع اتجاه حركة البروتون الساقط الابتدائية اثبت ان

$$2\cot\theta\cot\varphi = 1 + \gamma$$

حيث

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

١٢ـ ٢٩ـ جد المصفوف لتحويل لورنتز بين منظومة المحاور x_μ ، x'_μ حيث المحوران x_1 ، x'_1 متوازيان ، ومنظومة المحاور التي تحمل الفتحة تتحرك بانطلاق v باتجاه x_1 والمحوران x'_2 و x'_3 دورا بزاوية θ حول المحور x_1 . ترجم النتيجة النهائية الى الوراء بدلالة اربع معادلات في الاحداثيات الاعتيادية $x, y, z, t, x', y', z', t'$.

١٢ــ٣٠ــ حل التمرين ١٢ــ٧ وذلك بالتعبير عن التعجيل بصيغة المتجه ــ الرباعي

١٢ــ ٣١ــ حل التمرين ١٢ــ٢٣ باستعمال القوة ــ الرباعية ٠

١٢ــ ٣٢ــ من حقيقة كون القوة ــ الرباعية F_μ تتحول كمتجه ــ رباعي جد قوانين التحويل للقوة الرباعية ٠ بين من هذه ان القوة الاعتيادية $\vec{f}$ تتحول كالاتي

$$f'_x = f_x - \frac{\beta}{c}\left(\frac{\dot{y}f_y + \dot{z}f_z}{1 - \dot{x}\beta/c}\right)$$

$$f'_y = \frac{f_y}{\gamma(1 - \dot{x}\beta/c)}$$

$$f'_z = \frac{f_z}{\gamma(1 - \dot{x}\beta/c)}$$

١٢ــ ٣٣ــ استعمل النتيجة السابقة لتبين ان تحويل القوة يمكن ان يعبر عنها كما يلي

$$\vec{f} = \vec{f}' + (\gamma - 1)\vec{f}'_p + \gamma\frac{\vec{u}}{c} \times \left(\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{f}'\right)$$

حيث $\vec{f}'_p = \hat{j}f'_y + \hat{k}f'_z$ ، $\vec{v} = \hat{i}v$ هي سرعة المحاور التي تحمل الفتحة و $\vec{u}$ هي سرعة الجسيم ٠(هذه النتيجة لها تطبيقات في لكهرومغناطيسية ٠ اذن اذا كانت $\vec{f}'$ هي قوة كهربائية على جسيم مشحون ، فالحد الاخير يمثل قوة تؤثر بزاوية عمودية على حركة الجسيم ، اى قوة مغناطيسية)٠

اجوبة الاسئلة الفردية

الفصل ١

١ ــ ١ (أ) $17^{\frac{1}{2}}$

(ب) صفر

(جـ) 90°

١ ــ ٣ $q = \frac{1}{2}$

١ ــ ٥ -1

١ ــ ٧ $\vec{N} = -2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

$N = 3$

$(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

١ ــ ١٣ $i'/2 + j' + k'\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}$

١ ــ ١٥

$$\begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin\phi\cos\theta & \sin\phi\sin\theta & \cos\phi \end{bmatrix}$$

١ ــ ١٧ $\hat{i} - k, \ \hat{j} - \hat{k}, \ \hat{k}$

الفصل ٢

٢ ــ ١ (أ)

$$\vec{v} = \hat{i}c - gt\hat{j}, \quad v = (c^2 + g^2t^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\vec{a} = -\hat{j}g$$

(جـ)

$$\vec{v} = \hat{i}A\omega\cos\omega t - \hat{j}B\omega\sin\omega t$$
$$v = \omega(A^2\cos^2\omega t + B^2\sin^2\omega t)^{\frac{1}{2}}$$
$$\vec{a} = -\omega^2(\hat{i}A\sin\omega t + \hat{j}B\cos\omega t)$$

٢ ــ ٣

$$\vec{v}_{12} = \hat{i}b\omega(-\sin\omega t - \cos\omega t) + \hat{j}b\omega(\sin\omega t - \cos\omega t).$$

$$|\vec{v}_{12}| = b\omega 2^{\frac{1}{2}} \qquad d|\vec{r}_{12}|/dt = 0$$

٢ ــ ٧ (أ)

$$a_{\tau} = g(1 + g^2t^2/c^2)^{\frac{1}{2}}, \quad a_n = g(1 + c^2/g^2t^2)^{\frac{1}{2}}$$

٢ _ ٩

(أ) $\vec{v} = (\hat{i}_r k + \hat{j}_{\theta\omega}) b e^{kt}$, $v(0) = b\,(k^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}}$

$\vec{a} = \hat{i}_r\,(k^2 - \omega^2) b e^{kt} + \hat{j}_\theta\, 2bk\omega\, e^{kt}$

$a(0) = b(k^2 + \omega^2)$

٢ _ ١١ $v = b\omega\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\cos\omega t\right) + \frac{\pi^2}{16}\sin^2\omega t\right]^{\frac{1}{2}}$

٢ _ ١٢ $(3 + 4t)\cos\omega t + (3t - 2t^2)\sin\omega t - 4t$

$\hat{i}(9t^2 + 2\omega\cos\omega t) + \hat{j}(-12t^3 + 2\omega\sin\omega t)$

$+ \hat{k}\left[(4 + 3\omega\sin\omega t) + (2t^2\omega - 3)\cos\omega t\right]$

٢ _ ١٥

(أ) $(a_o^2 + v^4/b^2)^{\frac{1}{2}}$

(ب) $a_o\left[2 + 2\cos\theta + (2v^2/a_o b)\sin\theta + v^4/a_o^2 b^2\right]^{\frac{1}{2}}$

حيث b يمثل نصف قطر العجلة ، v الانطلاق الامامي ، و θ قيست من اعلا نقطة على العجلة . يحدث التعجيل في نهايته العظمى في النقطة المعرفة بـ $\tan\theta = v^2/a_o b$

٢ _ ١٩ $|\vec{a}| = b\left[(\omega_1^2 + \omega_2^2\sin^2\theta)^2 + 4\omega_1^2\omega_2^2\cos^2\theta + \omega_2^4\sin^2\theta\cos^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}$

حيث قيست θ من الخط الشاقولي المركزي . في اعلى نقطة θ تساوى صفر و $|\vec{a}| = b\,(\omega_1^4 + 4\omega_1^2\omega_2^2)^{\frac{1}{2}}$

الفصل ٣

٣ _ ١ $(5/2)\,F_o t_o^2/m$

٣ _ ٣ $(7/6)\,c t_o^3/m$

٣ _ ٥ $(v_o/g)\left[(\sin\theta + \mu\cos\theta)^{-1} + (\sin^2\theta - \mu^2\cos^2\theta)^{-\frac{1}{2}}\right]$

٣ ـ ٩

(أ) $V(x) = kx^{n+1}/(n+1)$

(ب) $v(x) = \pm\left[v_0^{\,2} - 2kx^{n+1}\, m(n+1)\right]^{\frac{1}{2}}$

(جـ) $x = \left[m v_0^{\,2}\,(n+1)/2k\right]^{1/n+1}$

٣ ـ ١١

(أ) $x = -(m/c)\left[v + (mg/c)\ln(1 - cv/mg)\right]$

(ب) $x = -(m/2c)\ln(1 - cv^2/mg)$

٣ ـ ١٣ $F(x) = -mb^2x^{-3}$

٣ ـ ١٥ $x = (2m\,v_0/k)^{\frac{1}{2}} \tan\left[(k v_0/2m)^{\frac{1}{2}}\, t\right]$

٣ ـ ١٧ $(A_1/A_2)\,(m_1/2m_2)^{\frac{1}{2}}$

٣ ـ ٢٥ ٤٫٢ ذبذبة

الفصل ٤

٤ ـ ١ محافظة (أ) ، (جـ) ، (د) ، (هـ) ، (و) .

٤ ـ ٣ $\left[v_0^{\,2} - 2(a+b+c)/m\right]^{\frac{1}{2}}$

٤ ـ ١٣ $x = 2\cos\omega t,\ y = 2\cos\omega t + 2\sin\omega t$

٤ ـ ١٥ $x = 6^{-\frac{1}{2}}\cos(2^{\frac{1}{2}}t),\ y = 2^{-\frac{1}{2}}\cos 2t,$

$z = 24^{-\frac{1}{2}}\cos(8^{\frac{1}{2}}t)$

٤ ـ ١٧ $z = b/3$

٤ ـ ١٩ $v = (2gb)^{\frac{1}{2}}\ ,\ R = 3mg$

الفصل ٥

٥ ـ ١ (أ) $S = m(g^2 + a_0^{\,2})^{\frac{1}{2}}\ ,\ \theta = \tan^{-1}(a_0/g)$

(ب) $S = m(g^2 + v_0^4/\rho^2)^{\frac{1}{2}}\ ,\ \theta = \tan^{-1}(v_0^{\,2}/g\rho)$

٥ ـ ٣ $-(v^2/\rho)\hat{i} + (v^2/b)\hat{k}$

٥ ـ ٥ $\vec{A} = -\hat{i}_r \left[b\omega^2 + 2\omega v + v^2/b \right]$, $\vec{F} = m\vec{A}$

$\vec{A} = -\hat{i}_r (4v^2/b)$

$\vec{A} = \vec{0}$

حيث $\hat{i}_r$ يمثل وحدة متجهة قطبية .

٥ ـ ٧ حوالي ٦ر٦ باوند قوة شرق .

٥ ـ ٩ حوالي ٣٦٠٠ ميل بالساعة .

٥ ـ ١١
$$d^3\vec{R}/dt^3 = \dddot{\vec{r}} + 3\dot{\vec{\omega}} \times \dot{\vec{r}} + 3\vec{\omega} \times \ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$
$$+ 2\vec{\omega} \times (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 3\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}})$$
$$+ \vec{\omega} \times \left[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \right] + d\vec{A}_0/dt$$

٥ ـ ١٣ لـ θ_0 صغيرة $\sin^2 \theta_0 \simeq \omega_e \sin\lambda \, (4/3)(l/g)^{1/2}$

التي تعطي $\theta_0 \approx 0.004^\circ$

الفصل ٦

٦ ـ ٣ $F = -GMmr^{-2} - G(4/3)\pi\rho\, mr$

٦ ـ ٥ $\Phi(r) = -GM(r^2 + a^2)^{-1/2}$, $\mathcal{G} = -GMr(r^2 + a^2)^{-3/2}$

٦ ـ ٧ قانون القوة ـ الخامسة العكسي

٦ ـ ٩ كـلا $\theta = kt^{1/7}$

٦ ـ ١١ (أ) ٣٥٤ سنة (ب) ١٩ر٠ (جـ) $1.995\, v_e$ و $0.01\, v_e$

٦ ـ ١٣ E سالبة ، اى المدار اهليليجي

٦ ـ ٢٣ $a > (\epsilon/k)^{1/2}$

٦ ـ ٢٥ يتقدم الحضيض القمري بحوالي ٤ر١° لكل دورة للمدارات القريبة من الارض .

الفصل ٧

٧ ـ ١ $\vec{r}_{cm} = \hat{i}/3 + 2\hat{j}/3 + 2\hat{k}/3$

$\vec{v}_{cm} = \hat{i} + 2\hat{j}/3 + \hat{k}/3$

$\vec{P} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

٧ ـ ٣ $v_0 (1 + m/M)^{-1}$

٧ ـ ٥ $v = 2.45\ v_0\ ,\quad \theta = 54^\circ\ 44'$

٧ ـ ١٧ بروتون $v'_x = v'_y = v\ (1 + 21^{\frac{1}{2}})/10 = 0.558\ v/$

هليوم $v'_x = v\ \ (1 + 21^{\frac{1}{2}})/40 = 0.139\ v$

$v'_y = v\ \ (9 - 21^{\frac{1}{2}})/40 = 0.11\ v$

٧ ـ ١٩ $\theta = \tan^{-1}\left[(21^{\frac{1}{2}} + 1)/(21^{\frac{1}{2}} - 1)\right]$

$= \tan^{-1} 1.84 = 61.5^\circ$

الفصل ٨

٨ ـ ١ (أ) $x_{cm} = y_{cm} = 4a/3\pi$

(ب) $x_{cm} = y_{cm} = 2a/2\pi$

(جـ) من القاعدة $h/4$

(د) من القمة $3b/5$

(هـ) $z_{cm} = 2b/3$

٨ ـ ٣ من المركز $2a/5$

٨ ـ ٥ $l\left[(\mu^2 + \mu \tan\theta)(1 + \mu^2)^{-1}(1+\bar{\omega}/W) - \omega/2W\right]$

٨ ـ ٧ $\sin^{-1}(8\mu/3)$

٨ ـ ١٣ $ma^2\left[(1/2) - (4/3\pi)^2\right]$

٨ ـ ١٥

(أ) $2\pi\ (2a/3g)^{\frac{1}{2}}\ 2^{\frac{1}{4}}\ ,\quad l' = a2^{\frac{1}{2}}/6$

(ب) $2\pi\ (7a/12g)^{\frac{1}{2}}\ 2^{\frac{1}{4}}\ ,\ l' = a2^{\frac{1}{2}}/12$

٨ ـ ١٩ $g(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2 + I/a^2)$

٨ ـ ٢١ (أ) الافقيــة $(3/4)\, mg \sin\theta\, (3\cos\theta - 2)$

الشاقوليــة $(1/4)\, mg\, (3\cos\theta - 1)^2$

(ب) يبدأ الانزلاق عندما يكون

$$|3\sin\theta\,(3\cos\theta - 2)| = \mu\,(3\cos\theta - 1)^2$$

ينزلق القضيب الى الخلف اذا استوفت المعادلة المذكـــورة اعلاه ما يلي $\theta < \cos^{-1}(2/3)$ او خلافا لذلك ينزلـــق الى الامام .

٨ ـ ٢٣ من المركــز $a/2$

٨ ـ ٢٥ $\hat{P}_A = m(g\ell)^{\frac{1}{2}}\,(2/9)^{\frac{1}{2}},\ \hat{P}_B = m(g\ell)^{\frac{1}{2}}\left[(9/8)^{\frac{1}{2}} - (2/8)^{\frac{1}{2}}\right]$

لحالة غير المرن التام .

٨ ـ ٢٧ $v_{cm_1} = -\hat{P}/4m\ ,\ \ \omega_1 = -3\hat{P}/2m\ell$

$v_{cm_2} = 5\,\hat{P}/4m\ ,\ \ \omega_2 = 9\hat{P}/m\ell$

$v_B = -\hat{P}/m$

الفصــــل ٩

٩ ـ ١ $L = mab\,\omega/12$

الزاويـة بين $\vec{L}$ والمحور -x هــــي $\tan^{-1}(a/b)$

الزاويـة بين $\vec{\omega}$ والمحور -x هــــي $\tan^{-1}(b/a)$

٩ ـ ٣ $L = (3/4)\, ma^2\,\omega/2^{\frac{1}{2}}$

الزاوية بين $\vec{L}$ ومحور القرص هي $\tan^{-1}\frac{1}{2} = 27^\circ\ 33'$

٩ ـ ٥ $I_{xx} = m\,(b^2 + c^2)/12\ ,\ I_{yy} = m\,(c^2 + a^2)/12$

$I_{zz} = m\,(a^2 + b^2)/12.$

جميع ضرب القصور الذاتية صفـر

$$\vec{L} = m\,\omega\,(a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{1}{2}}\left[a(b^2 + c^2)\,\hat{i} + b(c^2 + a^2)\,\hat{j} + c(a^2 + b^2)\hat{k}\right]/12$$

٩ ـ ٧ $I_{xx} = mb^2/6$, $I_{yy} = ma^2/6$, $I_{zz} = m(a^2 + b^2)/6$

$I_{xy} = -mab/12$, $I_{yz} = I_{xz} = 0$

$\theta = (\frac{1}{2}) \tan^{-1} \left[ab/(a^2 - b^2)\right]$

٩ ـ ٩ $a/b = 3^{-\frac{1}{2}}$

٩ ـ ١١ العزوم الرئيسية في مركز كرة كبيرة هي

$(2/5)ma^2$, $(11/56)ma^2$, $(11/56)ma^2$

٩ ـ ٢١ ٠٠٦٥ر٠ ثانية من قوس

٩ ـ ٢٣ تتحرك المنصة باتجاه الدفع بسرعة $\hat{P}/m$ (لتأثير الانتقالـــــي)
وتبدأ تتهاوى تحت تأثير الطواف الحر حيث يعمل متجه السرعـــــــة
الزاوية الجديد زاوية ($\tan^{-1}(4\hat{P}/ma\,\omega)$ مع محور تناظر المنصة .

٩ ـ ٢٥ حوالي ١٧ دورة بالدقيقة و ٤٣٠ دورة بالدقيقة .

٩ ـ ٢٧ حوالي ٣٨٥٠٠٠ دورة بالدقيقة

٩ ـ ٢٩ .

(أ)
$$ma^2 \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

(ب)
$$ma^2 \begin{bmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{bmatrix}$$

٩ ـ ٣١ $\vec{L} = ma^2 \omega 3^{-\frac{1}{2}} (1/6) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T = ma^2\omega^2/36$

الفصـــــل ١٠

١٠ ـ ١ $(5/7)g \sin \theta$

١٠ ـ ٣ $x = (g/2\omega^2)(\sin \omega t - \sin h\, \omega t) + x_0 \cos h\, \omega t$

١٠ ـ ٥ $g\left[(m + m'')/(2m + m')\right]$

حيث m'' هي كتلة الوتر المتعلــق على الطاولة

١٠ ـ ٧ $m_1 : (23/25)g$ (اعلى)

$m_2 : (13/25)g$ (اسفل)

$m_3 : (1/25)\ g$ (اسفل)

$m_4 : (9/25)g$ (اسفل)

١٠ ـ ١١ $md^2R/dt^2 = mR\dot{\phi}^2 - \partial V/\partial R$

$md\,(R^2\,\dot{\phi})/dt = -\ \partial V/\partial \phi$

$md^2z/dt^2 = -\ \partial V/\partial z$

١٠ ـ ١٥ انظر المعادلتين (٤ ـ ٩٢) و (٤ ـ ٩٣)

١٠ ـ ١٧ $\ddot{r} = r\dot{\phi}^2\ \sin^2\alpha - g\ \cos\alpha\ ,\ d(r^2\ \dot{\phi})/dt = 0$

حيث α هي نصف زاوية المخروط .

١٠ ـ ١٩ $v_{cm_1} = (4\hat{P}/5m)\ ,\ \ \omega_1 = 0$

$v_{cm_2} = (\hat{P}/5m)\ \ ,\ \ \omega_2 = (3\hat{P}/5ma)$

١٠ ـ ٢١ $P_x = m\dot{x} - qA_x\ ,\ P_y = m\dot{y} - qA_y,$

$P_z = m\dot{z} - qA_z$

١٠ ـ ٢٢ $H = P_\theta^2/(2m\ell^2) + P_\phi^2/(2m\ell^2\ \sin^2\theta) - mg\ell\cos\theta$

$\dot{\theta} = P_\theta/m\ell^2\ ,\ \dot{P}_\theta = -\left[(P_\phi^2\ \cos\theta)/(m\ell^2\ \sin^3\theta)\right]$

$-\ mg\ \ell\ \sin\theta$

$\dot{\phi} = P_\phi/m\ell^2\ \sin^2\theta\ \ ,\ \ \dot{P}_\phi = 0$

الفصل ١١

١١ ـ ١ (غير مستقر) $x = 0$, (مستقر) $x = b$

(مستقر) $x = -b/2$

١١ ـ ٣ $V = k\left[y^2 - 2\ell(\ell^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\right] - mgy$

١١ ـ ٩ $x = b : (2\pi/3b)(m/2k)^{\frac{1}{2}}$

$x = -b/2 : (2\pi/3b)\ (m/k)^{\frac{1}{2}}$

١١ ـ ١١ $2\pi\left[5a/3g\ (b - a)\right]^{\frac{1}{2}}$

١١ ـ ١٣ $2\pi\left[7a^2/5g\ (b - a)\right]^{\frac{1}{2}}$

١١ ـ ١٥ $x_1 = (A_0/2)\cos\omega_a t + (V_0/2\omega_a)\sin\omega_a t$

$+ (A_0/2)\cos\omega_b t + (V_0/2\omega_b)\sin\omega_b t$

١١ ـ ١٧ $\omega = \left[(9 \pm 17^{\frac{1}{2}})/8\right]^{\frac{1}{2}}\ \omega_0$

١١ ـ ١٩ $\omega = \omega_0\left[n + 1 \pm (n^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}$

حيث $n = \ell_1/\ell_2 \quad , \quad \omega_0 = (g/\ell_2)^{\frac{1}{2}}$

١١ ـ ٢٣ $\omega = \omega_0\left[3n + 4 \pm (9n^2 + 12n + 16)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}$

حيث $n = b/2a \quad , \quad \omega_0 = (g/2b)^{\frac{1}{2}}$

١١ ـ ٢٧ $\omega_1 = (k/m')^{\frac{1}{2}}$

$\omega_2 = \left[(k/m') + (2k/m)\right]^{\frac{1}{2}}$

١١ ـ ٢٩ (طولية) $v = (k/m)^{\frac{1}{2}}\ (\ell + \Delta\ell)$

(مستعرضة) $v = (k/m)^{\frac{1}{2}}\left[\Delta\ell(\ell + \Delta\ell)\right]^{\frac{1}{2}}$

الفصل ١٢

١٢ ـ ٥ ٤٥ مايكروثانيـــة

$\Delta r_B = 11.5$ m, $\Delta t_B = 1.92 \times 10^{-8}$ sec ١٢ ـ ٧

$\Delta r_c = 10$ m , $\Delta t_c = 0$

$\Delta r_B = 13.2$ m , $\Delta t_B = 3.06 \times 10^{-8}$ sec

$\Delta r_c = 10.14$ m

$\Delta t_c = 1.15 \times 10^{-8}$ sec

١٢ ـ ١١ ٤ر٥ سنة و ٣ر١٠ سنة

١٢ ـ ١٥ الكلاسيكي $v = 0.37\ c$, $\theta = 73^\circ\ 45'$

حسب النظرية النسبية $v = 0.39\ c$, $\theta = 73^\circ\ 11'$

١٢ ـ ٢١ $c\left[1 + (m_0 c)^2/(ft)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$

١٢ ـ ٢٧ $\left[m_1^2 + m_2^2 + \gamma(v_1)\ \gamma(v_2)\ 2m_1 m_2\ (2 - v_1 v_2 \cos\theta)\right]^{\frac{1}{2}}$

١٢ ـ ٢٤

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

الفهرســـــــت

آ

ب

ت

ج

ح

س

ش

ض

ط

ع

ق

ن

المصطلحات العلميـــة

A

angular momentum	زخـم زاوى
annihilation	ابـادة
antiparticle	جسيم مضـاد
apsides	قبـــا
asidal angles	زوايا قبوية
asymptote	خط مقارب

B

ballistic	قذفي ، بلستي

C

canonical	قانونـــي
canical pendulum	بندول مخروطي
cartesian coordinates	محاور ديارتية
center of mass coordinates	محاور مركزالكتلة
celestial mechanics	ميكانيك سماوى
central force	قـوة مركزية
centripetal	جذب نحو المركز
conservative	حافظ
constraint	مقيــد
contour lines	خطوط مناسيب
configuration	شكل عام ، وضع
compound pendulum	بندول مركب
compatible	منسجم
couple	مـــزدوج

creation	خلـــق
curve	منحـــن
cycloid	دويـــرى
cross product	ضرب اتجاهي
charaeteristic time	زمن نوعـي
coordinates	محـــاور
coriolis	كوريلـــــي
collision	تصـــادم
coefficient of restitution	معامل الارتداد

D

del operator	موثــر دلتا
divergence	متفرقـــة
dynamic	ديناميك
dampe	متضائـــل
driving frequency	تردد دافـــع
driving force	قوة دافعـــة
degree of freedom	درجات حريـــة

E

exact differential	تفاضل دقيـــق
elemmtary particles	جسيمات بدائية
escape speed	انطلاق الافلات
effective potential	جهد فعلـــي
exoergic	باعـث حرارة
extreme	اعظم او اصغـــر

exact solution	حل دقيق
elliptic	موجز

F

field	مجال
foucault pendulum	بندول فوكو
forced harmonic motion	حركة توافقية
four-vector form	صيغة المتجه ـ الرباعي
frequency	تردد

G

gradient (grad.)	منحدر
gravitational	تثاقلي
geocentric latitude	زوايا خط العرض
generalized coordinates	أحداثيات معممة

H

harmonic	توافقي
hoop	طوق

I

isotropic	متجانس في الابعاد الثلاث
incomplete elliptic	موجز ناقص
isochronous	تساوى الزمن
inertial reference system	محاور مرجعية مستمرة
in phase	متوافقة الطور
impact	تصادم

impulse	دفـــــع
inertia	قصـور ذاتي
ignorable	مهمـــل
interferometer	مدخـــال
inertial forces	قوى زائفــــة
inertial terms	حدود زائفــة

L

linear	خطـــي
limit	غايـــة
laminar	صفائحيـــة

M

magnetron	مكتـرون
moment	عـــزم
matrix	مصـــفوف
moment of inertia	عزم القصور الذاتي
momental ellipsoid	المجسم الناقص للعزم
momentum	زخـــم
mode	صيغـــة

N

nonlinear	غيـر خطـي
nul	صفـر
nutation	ترنـح
neutral	مستمر
normal	عيـاري
restoring force	قـوة معيـدة
resonance	رنيـن
response	استجابـة
reduced mass	كتلـة مصغـرة
rigid body	جسم صلـد
radius of gyration	نصف قطر التدويم
rectilinear	على خط مستقيم

O

oscillator	متـذبذب

P

potential	جهـد ، كامنـة
projectile	قذيفـة
parameter	بارمتـر
pendulum	بنـدول
power series	متسلسلة اساسية
process	تقـدم
plumb line	شاقول البناء
polar coordinates	احداثيات قطبية
principle	قاعـدة
power law	قانون الاساسية
physical pendulum	بندول فيزيائي
principle axes	محاور رئيسية
proper time	زمن مناسب

Q

quality factor	معامل النوعيـة

R

radian	زاوية نصف قطرية
refrenee	مرجعيـة
relative	نسـبي
resisting	مقـاوم

spatial	فراغي
separable	قابلة الفرز
spherical pendulum	بندول كروى
static	ستاتيكي
scalar	كمية عددية
speed	انطلاق
stifness	مرونة
scattering	تشتت
silly putty	معجون سخيف
shell	قشرة
slipping	انزلاق
spin	تدوم
stable	مستقر
sinusoidal waves	موجات منحن الجيب
standing waves	موجات مستقرة
simultaneity	توقت
superposition	تداخل
secular equation	معادلة بدائية

T

translation	انتقالية
transverse	مستعرض
terminal velocity	سرعة المنتهى
transient	عابر
thrust	دفع مضاد
top	تدوم

transpose matrix	مصفوف التحويل
time dilatation	تمديد الزمن
twin paradox	توأم التناقض الظاهرى
transformation	تحويل

U

unstable	غير مستقر

V

vector	كمية متجهة
viscous	لزوجة